Concours Gauss 8e

Partie A

1. La valeur de $2^5 + 5$ est :
   (**A**) 20 (**B**) 37 (**C**) 11 (**D**) 13 (**E**) 21

   Solution
   $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 5 = 37$ RÉPONSE : (B)

2. On place un nombre dans la case pour que l'égalité soit vraie : $8 + \frac{7}{\square} + \frac{3}{1000} = 8{,}073$

   Quel nombre a-t-on placé?
   (**A**) 1000 (**B**) 100 (**C**) 1 (**D**) 10 (**E**) 70

   Solution
   Puisque $8{,}073 = 8 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{100}$, le nombre est 100. RÉPONSE : (B)

3. La valeur de $\frac{5+4-3}{5+4+3}$ est :
   (**A**) -1 (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) 2 (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $-\frac{1}{2}$

   Solution
   $\frac{5+4-3}{5+4+3} = \frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ RÉPONSE : (D)

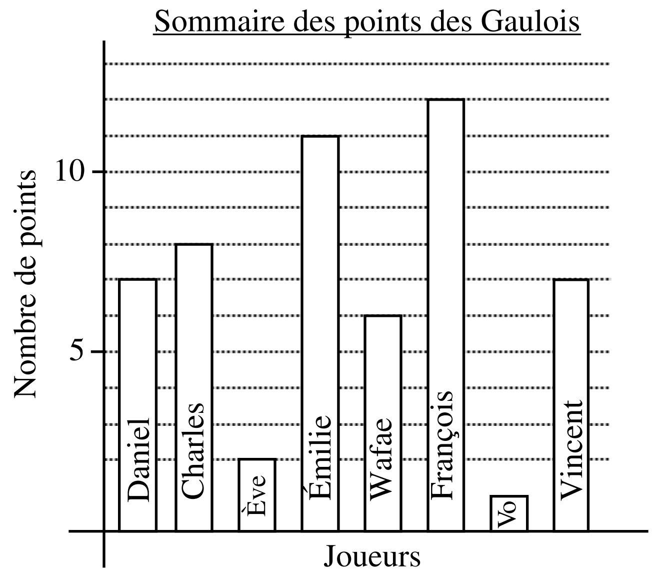
4. Dans l'addition illustrée, on peut placer un chiffre dans chacune des deux cases. Il peut s'agir de deux chiffres différents ou identiques. Quelle est la somme de ces deux chiffres?

$$\begin{array}{r} 8\ 6\ 3 \\ \square\ 9\ 1 \\ 7\ \square\ 8 \\ \hline 2\ 1\ 8\ 2 \end{array}$$

   (**A**) 9 (**B**) 11 (**C**) 13
   (**D**) 3 (**E**) 7

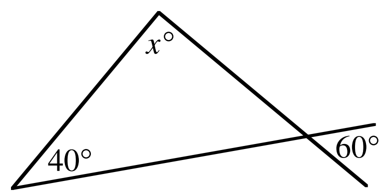
   Solution
   On additionne la colonne des unités pour obtenir $3+1+8=12$. On a donc 1 dizaine qui s'ajoute à la colonne des dizaines, puisque $12 = 1 \times 10 + 2$. On additionne les dizaines pour obtenir $1+6+9+\mathbf{o}=18$. La case contient donc un 2 et on a donc 1 centaine qui s'ajoute à la colonne des centaines. On additionne les centaines pour obtenir $1+8+\mathbf{o}+7=21$. La case contient donc un 5. Les deux chiffres dans les cases sont 2 et 5 et leur somme est 7. RÉPONSE : (E)

5. Le graphique représente le sommaire des points comptés par l'équipe des Gaulois dans leur dernière partie de basket-ball intra-muros. Le nombre total de points comptés par l'équipe est égal à :
(**A**) 54 (**B**) 8 (**C**) 12
(**D**) 58 (**E**) 46

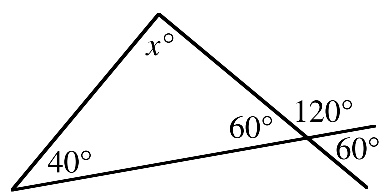


Solution
Voici les points comptés par chacun : Daniel, 7; Charles, 8; Ève, 2; Émilie, 11; Wafae, 6; François, 12; Vo, 1; Vincent, 7.
Le nombre total de points est égal à $7+8+2+11+6+12+1+7$, ou 54. RÉPONSE : (A)

6. Quelle est la valeur de x dans le diagramme?
(**A**) 20 (**B**) 80 (**C**) 100
(**D**) 120 (**E**) 60



Solution
Le supplément de l'angle de $60°$ mesure $120°$ et l'angle opposé par le sommet mesure $60°$, comme l'indique le diagramme.
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à $180°$, on a $x° + 40° + 60° = 180°$, d'où $x = 80$.



RÉPONSE : (B)

7. La bourse de Toronto a enregistré les changements suivants pendant la semaine.

Lundi	-150
Mardi	$+106$
Mercredi	-47
Jeudi	$+182$
Vendredi	-210

Quel est le changement net pour la semaine?
(**A**) baisse de 119 (**B**) hausse de 119 (**C**) hausse de 91
(**D**) baisse de 91 (**E**) hausse de 695

Solution
$-150+106-47+182-210=-119$
Le changement net pour la semaine est donc une baisse de 119 points. RÉPONSE : (A)

8. Si $x * y = x + y^2$, alors $2 * 3$ est égal à :
(**A**) 8 (**B**) 25 (**C**) 11 (**D**) 13 (**E**) 7

Solution
$2 * 3^2 = 2 + 3^2$ ou 11 RÉPONSE : (C)

9. Combien des cinq énoncés suivants sont justes?
i) (20 % de 40) = 8 ii) $2^3 = 8$ iii) $7-3\times 2 = 8$ iv) $3^2 - 1^2 = 8$ v) $2(6-4)^2 = 8$
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution
i) Vrai : (20 % de 40) est égal à $\frac{1}{5}$ de 40, ou 8.
ii) Vrai : 2^3 est égal à $2\times 2\times 2$, ou 8.
iii) Faux : $7-3\times 2$ est égal à $7-6$, ou 1.
iv) Vrai : 3^2-1^2 est égal à $9-1$, ou 8.
v) Vrai : $2(6-4)^2$ est égal à $2(2)^2$, ou 8.
Quatre des énoncés sont justes. RÉPONSE : (D)

10. Carl a vu son salaire réduit de 10 %. Plus tard, lors d'une promotion, son salaire a augmenté de 10 %. Au départ, son salaire était de 20 000 \$. Quel est son salaire actuel?
(**A**) 16 200 \$ (**B**) 19 800 \$ (**C**) 20 000 \$ (**D**) 20 500 \$ (**E**) 24 000 \$

Solution
Puisque Carl a vu son salaire réduit de 10 %, son salaire réduit était égal à $(0{,}90)\times(20\,000)$, ou 18 000 \$. Lors de la promotion, son salaire a augmenté de 10 %. Son salaire actuel est donc égal à $(1{,}10)\times(18\,000)$, ou 19 800 \$. RÉPONSE : (B)

Partie B

11. On veut recouvrir de pierres de patio un jardin de forme rectangulaire mesurant 15 m sur 2 m. Si chaque pierre de patio mesure 0,5 m sur 0,5 m, combien en faudra-t-il pour recouvrir le jardin?
(**A**) 240 (**B**) 180 (**C**) 120 (**D**) 60 (**E**) 30

Solution
Le jardin a une aire de 30 m^2.
Chaque pierre de patio a une aire de $(0{,}5)\times(0{,}5)$, ou 0,25 m^2.
Il faut donc 4 pierres pour recouvrir chaque mètre carré.
Il faudra donc 4×30, ou 120 pierres pour recouvrir le jardin. RÉPONSE : (C)

12. On additionne les nombres premiers entre 10 et 20 pour obtenir le nombre Q. Quel est le plus grand diviseur premier du nombre Q?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 11

Solution

Les nombres premiers entre 10 et 20 sont 11, 13, 17 et 19.

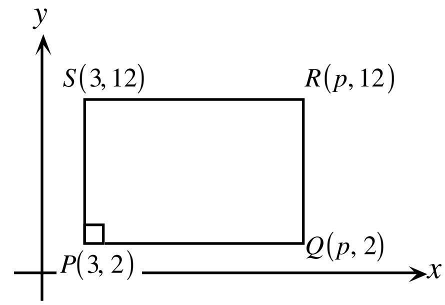
Donc $Q = 11 + 13 + 17 + 19$, ou 60.

En factorisation première, $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Le plus grand diviseur premier du nombre Q est donc 5. RÉPONSE : (C)

13. Les coordonnées des sommets du rectangle $PQRS$ sont indiquées dans le diagramme. Le rectangle $PQRS$ a une aire de 120. La valeur de p est :

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 13
(**D**) 14 (**E**) 15



Solution 1

On voit que le rectangle a une hauteur égale à $12 - 2$, ou 10 unités.

Puisque le rectangle a une aire de 120, il doit avoir une base de 12 unités, car $12 \times 10 = 120$.

Donc p est égal à $3 + 12$, ou 15.

Solution 2

La hauteur du rectangle est égale à 10 unités et la base est égale à $(p - 2)$ unités.

Donc $10(p - 3) = 120$.

$$p - 3 = 12$$
$$p = 15$$

RÉPONSE : (E)

14. Un ensemble de cinq entiers strictement positifs différents a une moyenne de 11. Quel est le plus grand nombre possible dans cet ensemble?

(**A**) 45 (**B**) 40 (**C**) 35 (**D**) 44 (**E**) 46

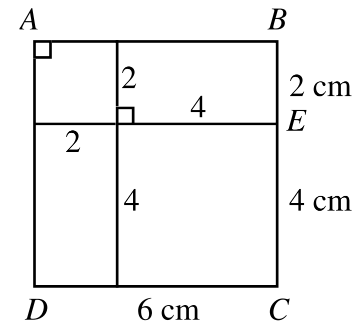
Solution

Puisque la moyenne des cinq entiers est égale à 11, leur somme est égale à 5×11, ou 55. Les quatre plus petits entiers possibles sont 1, 2, 3 et 4. Le plus grand nombre possible est donc égal à $55 - (1 + 2 + 3 + 4)$, ou 45. RÉPONSE : (A)

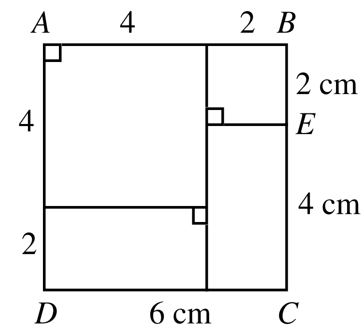
15. Le carré $ABCD$ est formé de deux rectangles identiques et de deux carrés dont les aires égalent 4 cm^2 et 16 cm^2. Quelle est l'aire du carré $ABCD$, en centimètres carrés?

(**A**) 64 (**B**) 49 (**C**) 25 (**D**) 36 (**E**) 20

Solution
Le diagramme indique une façon de dessiner le carré $ABCD$. Le petit carré a des côtés de 2 cm et le grand carré a des côtés de 4 cm. Le carré $ABCD$ a alors des côtés de 6 cm et une aire de 36 cm^2.



On peut aussi dessiner le carré $ABCD$ comme dans le diagramme ci-contre.



RÉPONSE : (D)

16. Trois dixièmes de la surface de notre planète sont recouverts de terre, le reste étant recouvert d'eau. Quatre-vingt-dix-sept pour cent de l'eau est salée, le reste est de l'eau douce. Quel pourcentage de la surface de la Terre est recouverte d'eau douce?
(**A**) 20,1 % (**B**) 79,9 % (**C**) 32,1 % (**D**) 2,1 % (**E**) 9,6 %

Solution
Puisque trois dixièmes de la surface de la planète sont recouverts de terre, les sept dixièmes, ou 70 %, sont recouverts d'eau. Puisque 97 % de l'eau est salée, 3 % de l'eau est douce. Donc 3 % de 70 % de la Terre est recouverte d'eau douce. Ceci représente : $(0,03)\times(0,7)=0,021$ de la surface de la Terre, ou 2,1 % de la surface.

RÉPONSE : (D)

17. Un certain mois, trois des dimanches tombent un jour du mois qui est un nombre pair. Le dixième jour de ce mois est un :
(**A**) samedi (**B**) dimanche (**C**) lundi (**D**) mardi (**E**) mercredi

Solution
Puisqu'il y a cinq dimanches ce mois-là, un des trois premiers jours du mois doit être un dimanche. Puisque le premier dimanche doit tomber un jour pair, ça doit être le 2^e jour du mois. Le 9^e jour du mois doit donc être un dimanche. Le 10^e jour du mois est donc un lundi.

RÉPONSE : (C)

18. Julie parcourt 60 km en direction sud, 40 km en direction ouest, 20 km en direction nord et 10 km en direction est. Quelle est la distance entre son point de départ et son point d'arrivée?
(**A**) 30 km (**B**) 50 km (**C**) 40 km (**D**) 70 km (**E**) 35 km

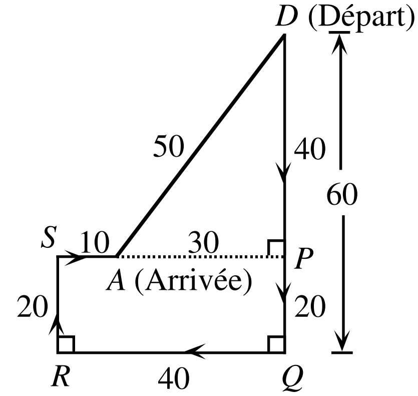
Solution

D'après le diagramme, on voit que le point d'arrivée A est situé à 40 km au sud et 30 km à l'ouest du point de départ D.

D'après le théorème de Pythagore, $AD^2 = 30^2 + 40^2$.

$$AD^2 = 2500$$
$$AD = 50$$

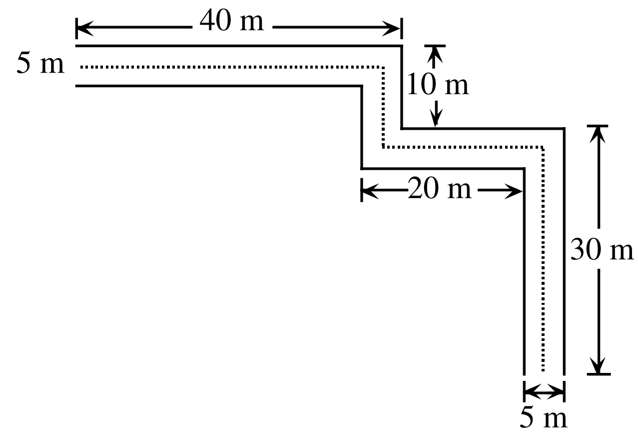
Il y a une distance de 50 km entre son point de départ et son point d'arrivée.



RÉPONSE : (B)

19. Un sentier pour vélos a une largeur de 5 m. Une ligne jaune est peinte au milieu du sentier. Si les côtés du sentier ont des longueurs de 40 m, 10 m, 20 m et 30 m, comme dans le diagramme, quelle est la longueur de la ligne jaune?

(**A**) 100 m (**B**) 97,5 m (**C**) 95 m
(**D**) 92,5 m (**E**) 90 m



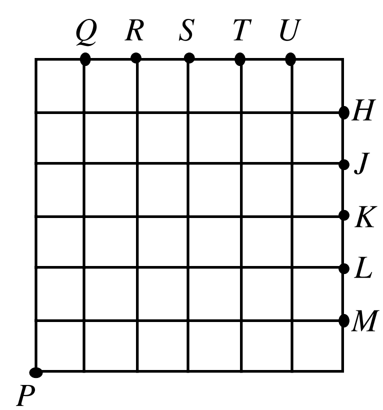
Solution

Puisque le sentier a une largeur de 5 m, la ligne du milieu est située à 2,5 m de sa bordure.

La longueur de la ligne jaune est égale à : $37,5 + 10 + 20 + 27,5 = 95$ m. RÉPONSE : (C)

20. Le diagramme illustre un quadrillage 6 sur 6. À partir du point P, on trace deux lignes droites de manière à diviser le quadrillage en trois régions d'aires égales. Ces droites passeront par les points respectifs :

(**A**) M et Q (**B**) L et R (**C**) K et S
(**D**) H et U (**E**) J et T



Solution

Soit les points A et B indiqués dans le diagramme.

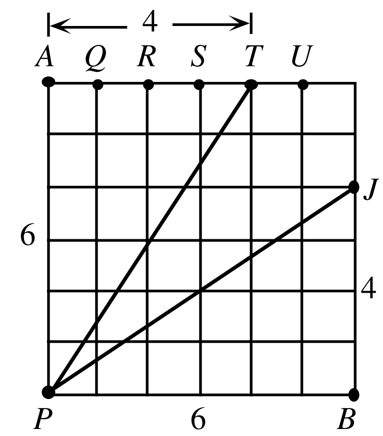
Le carré a une aire de 36.

Puisqu'il doit être divisé en trois régions d'aires égales, chacune des régions doit avoir une aire de 12.

Si on trace une ligne de P à un des points Q, R, S, T ou U, on obtient un triangle rectangle ayant une hauteur AP de 6 unités. Sa base doit mesurer 4 pour que l'aire égale 12 car $\frac{4 \times 6}{2} = 12$. On doit donc choisir le point T.

De la même manière, on choisit le point J.

Les deux points sont donc T et J.



RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Samuel marche en ligne droite vers un poteau de 8 m au sommet duquel il y a une lampe. Lorsqu'il arrive à 12 m du poteau, son ombre a une longueur de 4 m. Quelle est la longueur de son ombre lorsqu'il est à 8 m du poteau?

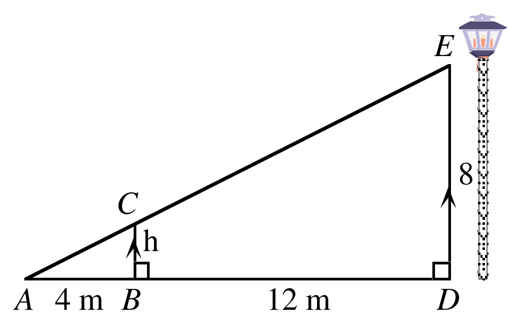
(**A**) $1\frac{1}{2}$ m (**B**) 2 m (**C**) $2\frac{1}{2}$ m (**D**) $2\frac{2}{3}$ m (**E**) 3 m

Solution

Le diagramme indique la position de Samuel lorsqu'il est à 12 m du poteau.

Puisque les triangles ABC et ADE sont semblables, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

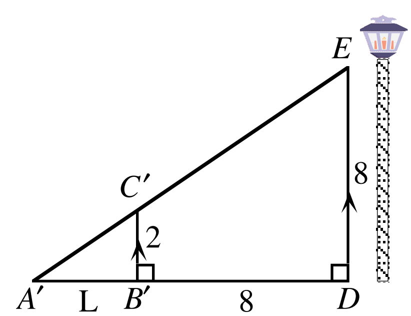
On a donc $\frac{h}{4} = \frac{8}{16}$, d'où $h = 2$.



Le diagramme ci-contre indique la position de Samuel lorsqu'il est à 8 m du poteau. La longueur de son ombre est représentée par L.

Puisque les deux triangles sont semblables, on a $\frac{L}{2} = \frac{L+8}{8}$.

Cette équation devient $\frac{4L}{8} = \frac{L+8}{8}$ si on choisit un dénominateur commun.



Donc : $4L = L + 8$

$3L = 8$

$L = 2\frac{2}{3}$ m

RÉPONSE : (D)

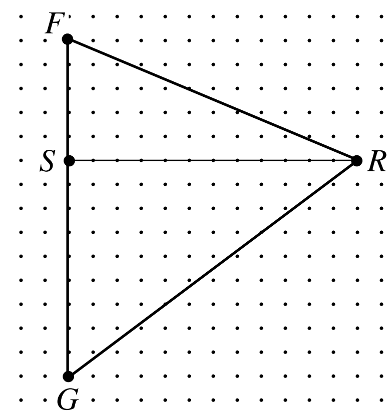
22. Le diagramme indique les maisons de Francine (F), Sylvie (S), Robert (R) et Guy (G), ainsi que des segments de droites qui les joignent. Francine considère quatre parcours pour visiter ses amis :

i) $F \to R \to S \to G$ ii) $F \to S \to G \to R$

iii) $F \to R \to G \to S$ iv) $F \to S \to R \to G$

Si $FS = 5$ km, $SG = 9$ km et $SR = 12$ km, la différence entre la longueur du parcours le plus long et celle du parcours le plus court, en km, est égale à :

(**A**) 8 (**B**) 13 (**C**) 15
(**D**) 2 (**E**) 0



Solution

Puisque $FS = 5$ et $SR = 12$, d'après le théorème de Pythagore, on a $FR^2 = 5^2 + 12^2$, d'où $FR = 13$.
Puisque $SG = 9$ et $SR = 12$, d'après le théorème de Pythagore, on a $GR^2 = 9^2 + 12^2$, d'où $GR = 15$.
Donc :

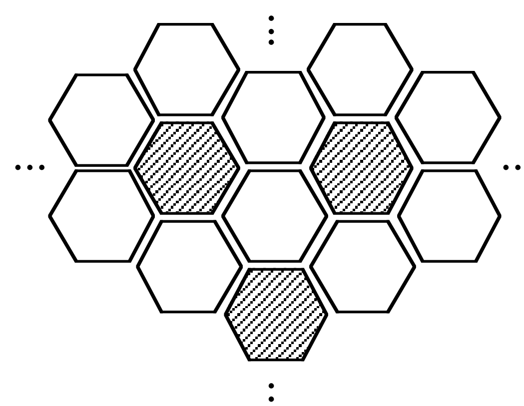
i) $FR + RS + SG = 13 + 12 + 9$, ou 34 km
ii) $FS + SG + GR = 5 + 9 + 15$, ou 29 km
iii) $FR + RG + GS = 13 + 15 + 9$, ou 37 km
iv) $FS + SR + RG = 5 + 12 + 15$, ou 32 km

La différence entre la longueur du parcours le plus long et celle du parcours le plus court est égale à 8 km.

RÉPONSE : (A)

23. Le diagramme illustre une partie d'une surface carrée qui a été carrelée d'hexagones réguliers. Les hexagones sont blancs ou bleus. Chaque hexagone bleu est entouré de 6 hexagones blancs, tandis que chaque hexagone blanc est entouré de 3 hexagones bleus et 3 hexagones blancs. Si on ignore les hexagones incomplets, la meilleure approximation du rapport du nombre d'hexagones bleus au nombre d'hexagones blancs contenus dans la surface carrée est :

(**A**) 1:6 (**B**) 2:3 (**C**) 3:10
(**D**) 1:4 (**E**) 1:2

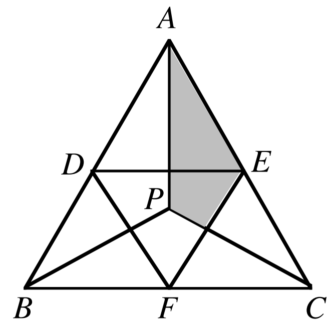


Solution

On considère d'abord une configuration de sept hexagones, formée d'un hexagone bleu entouré de six hexagones blancs. Il semble alors qu'il y a six fois plus d'hexagones blancs que d'hexagones bleus. Or chaque hexagone blanc est adjacent à trois hexagones bleus. Chaque hexagone blanc fait donc partie de trois configurations différentes de sept hexagones. Le nombre d'hexagones blancs est donc égal à six fois le nombre d'hexagones bleus, divisé par trois, c'est-à-dire deux fois le nombre d'hexagones bleus. Le rapport du nombre d'hexagones bleus au nombre d'hexagones blancs est donc égal à 1:2.

RÉPONSE : (E)

24. Dans le triangle équilatéral ABC, on a tracé des segments du point P aux sommets A, B et C de manière à former trois triangles identiques. Les points D, E et F sont les milieux des côtés du triangle ABC. On les joint comme dans le diagramme. Quelle fraction du triangle ABC est ombrée?

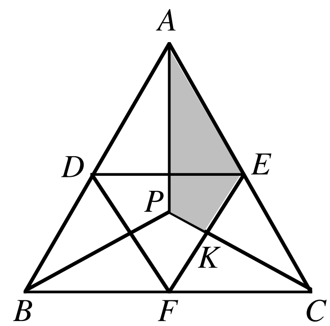


(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{5}{24}$ **(C)** $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{2}{9}$ **(E)** $\frac{2}{7}$

Solution 1

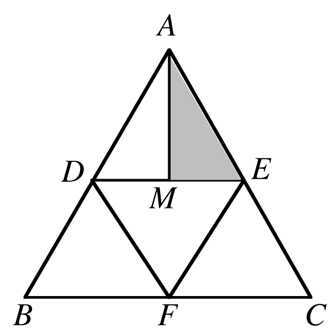
Par symétrie, le segment CP divise le triangle ECF en deux triangles de même aire. L'aire du triangle EKC égale $\frac{1}{2}$ de l'aire du triangle ECF. Puisque l'aire du triangle ECF égale $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle ABC, alors l'aire du triangle EKC égale $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle ABC, c.-à-d. $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle ABC.



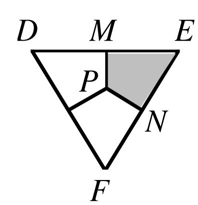
Par symétrie, l'aire du triangle APC égale $\frac{1}{3}$ de l'aire du triangle ABC. Puisque l'aire de la section ombrée est égale à l'aire du triangle APC moins celle du triangle EKC, elle est égale à $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$, ou $\frac{5}{24}$ de l'aire du triangle ABC

Solution 2

Puisque D, E et F sont les milieux des côtés du triangle ABC, en les joignant, on forme quatre triangles identiques. Puisque l'aire du triangle AME est la moitié de l'aire du triangle ADE, elle est égale à $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle ABC.



Le triangle DEF est divisé en trois quadrilatères identiques, dont le quadrilatère $MENP$. Puisque l'aire du triangle DEF égale un quart de l'aire du triangle ABC, l'aire du quadrilatère $MENP$ est égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, c.-à-d. $\frac{1}{12}$ de l'aire du triangle ABC.



L'aire de la partie ombrée est donc égale à $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$, ou $\frac{5}{24}$ de l'aire du triangle ABC.

RÉPONSE : (B)

25. Dans un bocal, il y a entre une douzaine et trois douzaines de biscuits aux pépites de chocolat. Tous les biscuits, sauf un, contiennent le même nombre de pépites. L'autre a une pépite de plus que les autres. Les biscuits contiennent un total de 1000 pépites de chocolat. Quelle est la somme du nombre de biscuits dans le bocal et du nombre de pépites dans le biscuit qui en a un de plus que les autres?

(**A**) 65 (**B**) 64 (**C**) 63 (**D**) 66 (**E**) 67

Solution

Si on enlève temporairement la pépite de trop du biscuit spécial, on a entre 12 et 36 biscuits qui contiennent un nombre égal de pépites de chocolat, pour un total de 999 pépites.

Or $999 = 9 \times 111$
$= (3 \times 3) \times (3 \times 37)$.

Cette factorisation première nous permet de voir que les factorisations en paires de 999 sont 1×999, 3×333, 9×111 et 27×37.

Le seul diviseur de 999 qui est situé entre 12 et 36 est 27. Il y a donc 27 biscuits contenant chacun 37 pépites de chocolat.

Le biscuit spécial contenait donc 38 pépites de chocolat.

La somme demandée est donc $27 + 38$, ou 65. RÉPONSE : (A)