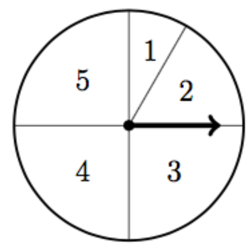
Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 4 mai 2020
Concours - Jour 1

La ressource d'aujourd'hui présente deux questions des concours de mathématiques 2020 du CEMI.

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème individuel nº4

Une toupie est créée en dessinant cinq rayons à partir du centre d'un cercle. Les quatre premiers rayons divisent le cercle en quatre parties égales. Le cinquième rayon, divise l'une des partie en deux, l'une ayant deux fois l'aire de l'autre. Les cinq parties sont étiquetées comme sur l'image ci-contre, la partie étiquetée 2 ayant deux fois l'aire de la partie étiquetée 1. Déterminez la probabilité de tirer un nombre impair en faisant tourner la toupie.



Concours Euclide 2020, nº4(a)

Les entiers strictement positifs a et b n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1. Sachant que b et a ont une différence de 15 et que $\frac{5}{9} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$, quelle est la valeur de $\frac{a}{b}$?

Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison lundi, le 11 mai, pour les solutions aux problèmes de Concours Jour 1.

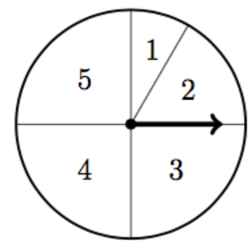
Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 4 mai 2020
Concours jour 1 - solutions

Voici les solutions aux deux problèmes de concours. La solution au deuxième problème est accompagnée d'une vidéo.

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème individuel nº4

Une toupie est créée en dessinant cinq rayons à partir du centre d'un cercle. Les quatre premiers rayons divisent le cercle en quatre parties égales. Le cinquième rayon, divise l'une des partie en deux, l'une ayant deux fois l'aire de l'autre. Les cinq parties sont étiquetées comme sur l'image ci-contre, la partie étiquetée 2 ayant deux fois l'aire de la partie étiquetée 1. Déterminez la probabilité de tirer un nombre impair en faisant tourner la toupie.



Solution : Sur la toupie, les nombres impairs sont 1, 3, et 5. Les parties étiquetées 3 et 5 prennent chacune $\frac{1}{4}$ de la toupie, elles ont donc chacune une probabilité d'être tirées de $\frac{1}{4}$. Si la probabilité de tirer 1 est de x alors, on a la probabilité de tirer 2 est $2x$. La probabilité de tirer soit 1 ou 2 est de $\frac{1}{4}$, ce qui signifie que $x + 2x = \frac{1}{4}$ ou $3x = \frac{1}{4}$ donc $x = \frac{1}{12}$.

Par conséquent, la probabilité de tirer un nombre impair est de $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Concours Euclide 2020, nº4(a)

Les entiers strictement positifs a et b n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1. Sachant que b et a ont une différence de 15 et que $\dfrac{5}{9} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{4}{7}$, quelle est la valeur de $\dfrac{a}{b}$?

Solution :

Puisque $\dfrac{a}{b} < \dfrac{4}{7}$ et que $\dfrac{4}{7} < 1$, alors $\dfrac{a}{b} < 1$.

Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors $a < b$.

Puisque a et b ont une différence de 15 et que $a < b$, alors $b = a + 15$.

On a donc $\dfrac{5}{9} < \dfrac{a}{a+15} < \dfrac{4}{7}$.

On multiplie les deux membres de l'inéquation de gauche par $9(a + 15)$ (ce qui est positif) pour obtenir $5(a + 15) < 9a$ d'où on a $5a + 75 < 9a$ ou $4a > 75$.

On voit d'après cela que $a > \dfrac{75}{4} = 18,75$.

Puisque a est un entier, alors $a \geq 19$.

On multiplie les deux membres de l'inéquation de droite par $7(a+15)$ (ce qui est positif) pour obtenir $7a < 4(a + 15)$ d'où on a $7a < 4a + 60$ ou $3a < 60$.

On voit d'après cela que $a < 20$.

Puisque a est un entier, alors $a \leq 19$.

Puisque $a \geq 19$ et que $a \leq 19$, alors $a = 19$, d'où $\dfrac{a}{b} = \dfrac{19}{34}$.

Vidéo

Clique ce lien pour une discussion sur deux approches différentes pour résoudre ce problème :
https://youtu.be/phNdHo5mE2g