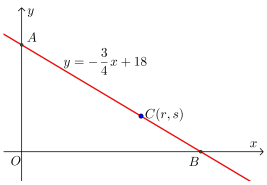


Problema de la Semana

Problema D y Solución

Localiza C

Problema

La recta con ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ cruza el eje positivo x en el punto B y el eje positivo y en el punto A. El origen, O, y los puntos A y B forman los vértices de un triángulo.

El punto $C(r, s)$ se encuentra en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$.

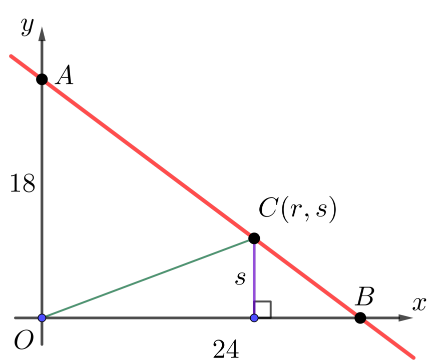
Determine los valores de r y s.

Solución

La ecuación de la recta se escribe en la forma $y = mx + b$, donde b es la intersección con y de la recta. Por lo tanto, la intersección en y de la recta con ecuación $y = -\frac{3}{4} + 18$ es 18, y $OA = 18$.

Para determinar la intersección en x de la línea, reemplazamos $y = 0$ para obtener $0 = -\frac{3}{4}x + 18$. Resolviendo, tenemos $\frac{3}{4}x = 18$, entonces $x = 24$. Por lo tanto, $OB = 24$.

Trazamos la perpendicular de C a OB. La base del $\triangle COB$ es $OB = 24$, y dado que C tiene la coordenada y s, la altura del $\triangle COB$ es s.



Ahora presentamos dos soluciones al problema.

Solución 1:

Como $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo con base $OB = 24$ y altura $OA = 18$, usando la fórmula area $= \frac{\text{base} \times \text{ altura}}{2}$, tenemos área de $\triangle AOB = \frac{24 \times 18}{2} = 216$.

Como el área del $\triangle AOB$ es tres veces el área del $\triangle COB$,
área de $\triangle COB = \frac{1}{3}(\text{área de } \triangle AOB) = \frac{1}{3}(216) = 72$.
Así, $\triangle COB$ tiene área 72, base $OB = 24$ y altura s.

Usando la fórmula área $= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{area of } \triangle COB &= \frac{OB \times s}{2} \\ 72 &= \frac{24 \times s}{2} \\ 72 &= 12s \\ s &= 6 \end{aligned}$$

Como $C(r, s)$ está en la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ y $s = 6$, tenemos

$$\begin{aligned} 6 &= -\frac{3}{4}r + 18 \\ \frac{3}{4}r &= 12 \\ r &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r = 16$ y $s = 6$.

Solución 2:

$\triangle AOB$ y $\triangle COB$ tienen la misma base, OB. Si dos triángulos tienen la misma base, entonces las áreas de los triángulos son proporcionales a las alturas de los triángulos.

Dado que el área de $\triangle AOB$ es tres veces el área de $\triangle COB$, entonces la altura de $\triangle AOB$ es tres veces la altura de $\triangle COB$. En otras palabras, la altura de $\triangle COB$ es $\frac{1}{3}$ la altura de $\triangle AOB$.

Sabemos que $\triangle AOB$ tiene una altura $OA = 18$ y $\triangle COB$ tiene una altura s. Por lo tanto, $s = \frac{1}{3}(OA) = \frac{1}{3}(18) = 6$.
Como $C(r, s)$ está en la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + 18$ y $s = 6$, tenemos

$$\begin{aligned} 6 &= -\frac{3}{4}r + 18 \\ \frac{3}{4}r &= 12 \\ r &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r = 16$ y $s = 6$.

Tenga en cuenta que en la segunda solución, en realidad no era necesario encontrar la longitud de OB, ya que nunca se usó.

Extensión:

¿Puedes encontrar las coordenadas del punto D en el segmento de recta AB tal que el área del $\triangle AOD$ sea igual al área del $\triangle COB$, creando así tres triángulos de igual área? ¿Cómo se relacionan los puntos A, D, C y B?