Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier nº 1

Logarithmes et exposants

BOÎTE À OUTILS

Soit a, b, x et y des nombres réels et n un entier non nul. Voici les lois des exposants :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^0 = 1\ (a \neq 0) \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}\ (a \neq 0)$$

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}\ (a \neq 0) \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x\ (b \neq 0)$$

De plus, 0^0 n'est pas défini s'il survient dans n'importe laquelle de ces formules.

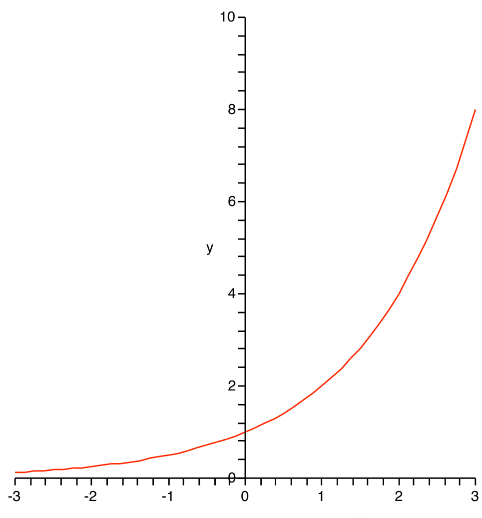
Soit a, x et y des nombres réels non nuls. Voici les lois des logarithmes :

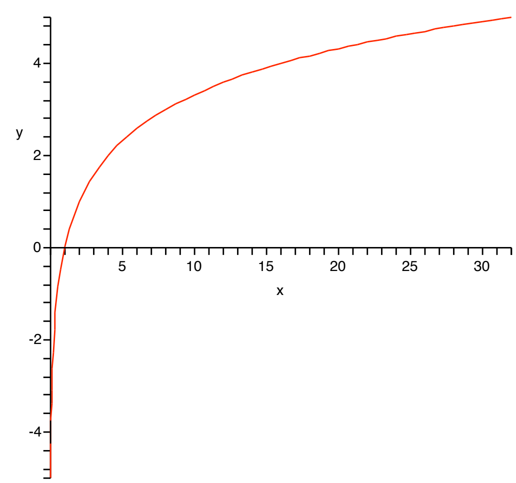
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a x \qquad \log_a(a^x) = a^{\log_a x} = x \qquad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a} \qquad \frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x$$

Si $f(x) = a^x$, alors $f^{-1}(x) = \log_a x$. Il faut savoir tracer la représentation graphique de f et de f^{-1}.
Voici le graphique de $y = 2^x$, suivi de celui de $y = \log_2 x$:





EXEMPLES DE PROBLÈMES

1. Calculer la valeur de $\dfrac{x}{y}$, sachant que $2\log_5(x-3y) = \log_5(2x) + \log_5(2y)$.

Solution
L'argument de chaque terme logarithmique doit être strictement positif. Donc $x > 0$, $y > 0$ et $x > 3y$. Or :

$$\begin{aligned} 2\log_5(x-3y) &= \log_5(2x) + \log_5(2y) \\ \log_5(x-3y)^2 &= \log_5(4xy) \end{aligned}$$

Puisqu'une fonction logarithmique est croissante, l'égalité précédente indique que les arguments sont égaux. Donc :

$$\begin{aligned} (x-3y)^2 &= 4xy \\ x^2 - 6xy + 9y^2 &= 4xy \\ x^2 - 10xy + 9y^2 &= 0 \\ (x-y)(x-9y) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x - y = 0$ ou $x - 9y = 0$, d'où $\dfrac{x}{y} = 1$ ou $\dfrac{x}{y} = 9$. Or d'après les restrictions, $\dfrac{x}{y} > 3$. Donc $\dfrac{x}{y} = 9$.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation $9(7^k + 7^{k+2}) = 5^{m+3} + 5^m$, m et k étant des entiers.

Solution
On factorise chaque membre de l'équation, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 9(1+7^2)7^k &= 5^m(5^3+1) \\ 3^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 7^k &= 5^m \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Puisque chaque membre de l'équation est un entier et que la factorisation première d'un nombre est unique, alors la seule solution est $m = 2$ et $k = 1$.

3. Déterminer les points d'intersection des courbes définies par $y = \log_{10}(x-2)$ et $y = 1 - \log_{10}(x+1)$.

Solution
Puisque l'argument de chaque terme logarithmique doit être strictement positif, alors $x - 2 > 0$ et $x + 1 > 0$, d'où $x > 2$. Or :

$$\begin{aligned} \log_{10}(x-2) &= 1 - \log_{10}(x+1) \\ \log_{10}(x-2) + \log_{10}(x+1) &= 1 \\ \log_{10}[(x-2)(x+1)] &= 1 \\ (x-2)(x+1) &= 10 \\ x^2 - x - 2 &= 10 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 4$ ou $x = -3$. Cette dernière est rejetée, puisque l'on doit avoir $x > 2$. Donc $x = 4$. Le point d'intersection est $(4,\ \log_{10} 2)$, ou $(4, 1 - \log_{10} 5)$. Puisque $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = 1$, ces deux points sont identiques.

4. Résoudre l'équation $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

Solution
Puisque l'argument d'un logarithme doit être strictement positif, alors $9 > 2^x$.

$$\begin{aligned} \log_2(9 - 2^x) &= 3 - x \\ (9 - 2^x) &= 2^{3-x} \\ (9 - 2^x) &= \frac{8}{2^x} \end{aligned}$$

On reporte $y = 2^x$ dans cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} 9 - y &= \frac{8}{y} \\ y^2 - 9y + 8 &= 0 \\ (y - 1)(y - 8) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y = 1$ ou $y = 8$. On reporte ces valeurs dans l'équation $y = 2^x$ pour obtenir $x = 0$ ou $x = 3$. Puisque chacune de ces valeurs satisfait à la restriction, les solutions sont $x = 0$ et $x = 3$.

5. La représentation graphique de $y = m^x$ passe aux points $(2, 5)$ et $(5, n)$. Quelle est la valeur de mn ?

Solution
Puisque la courbe passe par ces points, leurs coordonnées vérifient l'équation. Donc $m^2 = 5$ et $n = m^5$. Donc :

$$\begin{aligned} m &= \pm\sqrt{5} \\ n &= (\pm\sqrt{5})^5 \\ mn &= (\sqrt{5})^6 \\ mn &= 125 \end{aligned}$$

TROUSSE DE PROBLÈMES

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 8 = 1$.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $12^{2x+1} = 2^{3x+7} \cdot 3^{3x-4}$.

3. Déterminer la somme de la série suivante :

$$\log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \log_{10} \frac{5}{4} + \cdots + \log_{10} \frac{200}{199}$$

4. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles $x^3y^5 = 2^{11} \cdot 3^{13}$ et $\dfrac{x}{y^2} = \dfrac{1}{27}$.

5. Soit $\log_8 3 = k$. Exprimer $\log_8 18$ en fonction de k.

6. Déterminer le point d'intersection des courbes définies par $y = \log_2(2x)$ et $y = \log_4 x$.

7. Soit $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ deux points sur la courbe représentative de $y = \log_a x$. On considère une droite horizontale qui passe au milieu du segment AB. Cette droite coupe la courbe au point $C(x_3, y_3)$. Démontrer que $(x_3)^2 = x_1x_2$.

8. La courbe repésentative de $y = ax^r$ passe aux points $(2, 1)$ et $(32, 4)$. Déterminer la valeur de r.

9. Soit $2^{x+3} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, x et y étant des entiers. Déterminer les valeurs de x et de y.

10. Soit $f(x) = 2^{4x-2}$. Déterminer une expression simplifée pour $f(x) \cdot f(1 - x)$.

11. Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\log_5(x - 2) + \log_5(x - 6) = 2$.

12. Démontrer que trois nombres strictement positifs a, b et c forment une suite géométrique si et seulement si $\log_x a$, $\log_x b$ et $\log_x c$ forment une suite arithmétique.