Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier n° 1

Solutions

SOLUTIONS

1. On a :

$$\begin{aligned}\log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 8 &= 1\\ \log_x(2\cdot 4\cdot 8) &= 1\\ \log_x(64) &= 1\\ x &= 64\end{aligned}$$

2. Puisque $12 = 2^2 \cdot 3$, alors :

$$\begin{aligned}2^{2(2x+1)}3^{2x+1} &= 2^{3x+7}3^{3x-4}\\ 2^{2(2x+1)-3x-7} &= 3^{3x-4-2x-1}\\ 2^{x-5} &= 3^{x-5}\end{aligned}$$

On sait que $x = 5$ est une solution, car $2^0 = 3^0 = 1$. Or, on sait que les représentations graphiques de $y = 2^{x-5}$ et de $y = 3^{x-5}$ se coupent en un seul point. Donc, la seule solution est $x = 5$.

3. On a :

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{3}{2} + \log_{10}\frac{4}{3} + \log_{10}\frac{5}{4} + \ldots + \log_{10}\frac{200}{199} &= \log_{10}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{200}{199}\right)\\ &= \log_{10}\frac{200}{2}\\ &= \log_{10}100\\ &= 2\end{aligned}$$

4. D'après la deuxième équation, on a $xy^{-2} = 3^{-3}$, ou $x^3y^{-6} = 3^{-9}$. On divise cette équation par la première équation, membre par membre, ce qui nous permet d'éliminer x. On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{x^3y^5}{x^3y^{-6}} &= \frac{2^{11}3^{13}}{3^{-9}}\\ y^{11} &= 2^{11}\cdot 3^{22}\\ y &= 18.\end{aligned}$$

D'après la deuxième équation, on a $x = \dfrac{18^2}{27}$, d'où $x = 12$.

5. $\log_8 18 = \log_8(2\cdot 9)$, ou $\log_8 18 = \log_8 2 + \log_8 3^2$, ou $\log_8 18 = \log_8(8^{\frac{1}{3}}) + 2\log_8 3$, d'où $\log_8 18 = \dfrac{1}{3} + 2k$.

6. On exprime les deux équations sous forme exponentielle, soit $2x = 2^y$ et $x = 4^y$. Au point d'intersection, on a :

$$\begin{aligned}2^y &= 2(4^y)\\ 2^y &= 2^{2y+1}\\ 1 &= 2^{y+1}\end{aligned}$$

Donc $y = -1$ et $x = \dfrac{1}{4}$.

7. Le milieu du segment AB est le point $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$. La droite horizontale qui passe par ce point a pour équation $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$. Au point d'intersection, on a donc $y_3 = \dfrac{y_1+y_2}{2}$. Or, puisque le point d'intersection vérifie l'équation $y = \log_a x$, ou $x = a^y$, on a :
$$\begin{aligned}(x_3)^2 &= (a^{y_3})^2\\ &= (a^{\frac{y_1+y_2}{2}})^2\\ &= (a^{y_1})(a^{y_2})\\ &= x_1x_2.\end{aligned}$$

8. Puisque les points $(2,1)$ et $(32,4)$ sont sur la courbe, alors $1 = a(2^r)$ et $4 = a(32^r)$. On divise la deuxième équation par la première, membre par membre, pour obtenir $4 = (16^r)$, d'où $r = \dfrac{1}{2}$.

9. On a :
$$\begin{aligned}2^{x+3} + 2^x &= 3^{y+2} - 3^y\\ (2^3+1)2^x &= (3^2-1)3^y\\ 9 \cdot 2^x &= 8 \cdot 3^y\\ 3^2 \cdot 2^x &= 2^3 \cdot 3^y\\ 2^{x-3} &= 3^{y-2}\end{aligned}$$
Puisque x et y sont des entiers, alors $x = 3$ et $y = 2$.

10. On a $f(x) \cdot f(1-x) = 2^{4x-2} \cdot 2^{4(1-x)-2}$, d'où $f(x) \cdot f(1-x) = 2^{4x-2+4-4x-2}$, ou $f(x) \cdot f(1-x) = 2^0$. Donc $f(x) \cdot f(1-x) = 1$.

11. Puisque les arguments sont positifs, on a $x > 6$.
$$\begin{aligned}\log_5(x-2) + \log_5(x-6) &= 2\\ \log_5((x-2)(x-6)) &= 2\\ (x-2)(x-6) &= 25\\ x^2 - 8x - 13 &= 0\end{aligned}$$
Donc $x = 4 \pm \sqrt{29}$. Or puisque $x > 6$, alors $x = 4 + \sqrt{29}$.

12. Si a, b et c forment une suite géométrique, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$, d'où $\log_x\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_x\left(\dfrac{b}{c}\right)$.
Donc $\log_x a - \log_x b = \log_x b - \log_x c$. Donc, $\log_x a$, $\log_x b$ et $\log_x c$ forment une suite arithmétique.

Si $\log_x a$, $\log_x b$ et $\log_x c$ forment une suite arithmétique, alors :
$$\begin{aligned}\log_x a - \log_x b &= \log_x b - \log_x c\\ \log_x\left(\frac{a}{b}\right) &= \log_x\left(\frac{b}{c}\right)\end{aligned}$$
Puisqu'une fonction logarithmique admet des valeurs différentes pour des arguments différents (elle est croissante), alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$.
Donc, a, b et c forment une suite géométrique.