Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier nº 2

Fonctions et équations

BOÎTE À OUTILS

Fonctions du second degré

Une fonction du second degré f, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c étant réels et $a \neq 0$) admet deux zéros, soit $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. L'expression $b^2 - 4ac$, notée Δ, est appelée le *discriminant* de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Les zéros r_1 et r_2 de la fonction sont :
- réels et distincts si $\Delta > 0$;
- réels et égaux si $\Delta = 0$;
- non réels et distincts si $\Delta < 0$.

On a $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$.

La représentation graphique de la fonction f est une parabole. Puisque l'équation $y = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, le sommet de la parabole est situé au point $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
Il faut savoir tracer la parabole dans les cas où a est positif ou négatif.

Polynômes

Théorème du reste et théorème de factorisation
Le théorème du reste : Lorsqu'un polynôme $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, de degré n, est divisé par $(x - k)$, le reste est égal à $p(k)$.
Le théorème de factorisation est une conséquence du théorème du reste : $p(k) = 0$ si et seulement si $(x - k)$ est un facteur de $p(x)$.
Une équation polynôme de degré n admet au plus n racines réelles.

Théorème des racines rationnelles
Toutes les racines rationnelles $\frac{p}{q}$ de l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ sont telles que p est un diviseur de a_n et q est un diviseur de a_0.

Transformées de graphiques
La représentation graphique des fonctions suivantes est obtenue en faisant subir une transformation à la représentation graphique de la fonction définie par $y = p(x)$ ou $y = f(x)$:

Graphique de $y = p(x) + k$: image du graphique de $y = p(x)$ par une translation de k unités vers le haut $(k > 0)$

Graphique de $y = p(x - k)$: image du graphique de $y = p(x)$ par une translation de k unités vers la droite $(k > 0)$

Graphique de $y = kp(x)$: image du graphique de $y = p(x)$ par une élongation verticale de facteur k $(k > 0)$

Graphique de $y = p(\frac{x}{k})$: image du graphique de $y = p(x)$ par une élongation horizontale de facteur k $(k > 0)$

Graphique de $y = -p(x)$: image du graphique de $y = p(x)$ par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses

Graphique de $y = p(-x)$: image du graphique de $y = p(x)$ par une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées

Graphique de $x = f(y)$ (ou $y = f^{-1}(x)$) : image du graphique de $y = f(x)$ par une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$

EXEMPLES DE PROBLÈMES

1. Soit $x^2 - x - 2 = 0$. Déterminer toutes les valeurs possibles de l'expression $1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}$.

Solution
On a : $x^2 - x - 2 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$
Donc $x = 2$ ou $x = -1$.
Donc :

$$\begin{array}{rlcrl} & 1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} & \text{ou} & & 1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \\ = & 1 - \frac{1}{2} - \frac{6}{4} & & = & 1 - \frac{1}{-1} - \frac{6}{1} \\ = & -1 & & = & -4 \end{array}$$

Donc, les valeurs possibles de l'expression sont -1 et -4.

2. La parabole définie par $y = x^2$ subit une translation de manière que ses abscisses à l'origine sont $-d$ et e et son ordonnée à l'origine est $-f$ ($d > 0$, $e > 0$, $f > 0$). Démontrer que $de = f$.

Solution 1 (élégante)
Puisque les abscisses à l'origine de l'image sont $-d$ et e, la nouvelle parabole a une équation de la forme $y = (x+d)(x-e)$. Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, posons $x = 0$. L'équation devient $-f = -de$, d'où $de = f$.

Solution 2 (ardue)
Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation de l'image. Puisque la parabole initiale a subi une translation, alors $a = 1$. On a donc $e = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, $-d = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ et $-f = c$. Donc $-de = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, d'où $-de = \frac{b^2 - b^2 + 4c}{4}$, ou $-de = c$, ou $-de = -f$. Donc $de = f$.

3. Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $x + \frac{36}{x} \geq 13$.

Solution
On doit avoir $x \neq 0$.
Si $x > 0$, on multiplie chaque membre de l'équation par x pour obtenir $x^2 - 13x + 36 \geq 0$, ou $(x-4)(x-9) \geq 0$. Or, la parabole d'équation $y = (x-4)(x-9)$ traverse l'axe des abscisses en $x = 4$ et $x = 9$. Elle est au dessus de l'axe des abscisses lorsque $0 < x \leq 4$ ou $x \geq 9$.
Si $x < 0$, le membre de gauche de l'inéquation est négatif et l'inéquation n'admet aucune solution.
Donc $0 < x \leq 4$ ou $x \geq 9$.

4. Lorsqu'on divise un polynôme par $x-3$, on obtient un reste de 5. Lorsqu'on le divise par $x+1$, on obtient un reste de -7. Quel reste obtient-on lorsqu'on le divise par x^2-2x-3 ?

Solution

Lorsqu'on divise un polynôme par un polynôme du second degré, le reste est un polynôme du premier degré.
Soit $p(x)$ le polynôme, $q(x)$ le quotient de la division et $ax+b$ le reste.
On a donc : $p(x) = (x^2-2x-3)q(x) + ax + b$ (*)
Or $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$.
On a donc : $p(x) = (x-3)(x+1)q(x) + ax + b$ (**)
Selon le théorème du reste, on a $p(3) = 5$ et $p(-1) = -7$.
Si $x = 3$, l'identité (**) devient $5 = (0)(4)q(3) + 3a + b$, ou $5 = 3a + b$.
Si $x = -1$, l'identité (**) devient $-7 = (-4)(0)q(-1) - a + b$, ou $-7 = -a + b$.
On résout les équations $5 = 3a + b$ et $-7 = -a + b$ pour obtenir $a = 3$ et $b = -4$. Le reste est donc égal à $3x - 4$.

TROUSSE DE PROBLÈMES

1. Déterminer toutes les solutions réelles (x, y) du système d'équations :
$$x^2 - xy + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + y = 0$$

2. La parabole d'équation $y = (x-1)^2 - 4$ coupe l'axe des abscisses aux points P et Q. Soit (a, b) le milieu du segment PQ. Déterminer la valeur de a.

3. (a) L'équation $y = x^2 + 2ax + a$ définit une parabole particulière pour chaque valeur réelle de a. Démontrer que toutes ces paraboles passent par un même point et déterminer les coordonnées de ce point.
   (b) Les sommets de ces paraboles sont situés sur une courbe. Démontrer que cette courbe est elle-même une parabole dont le sommet est le point commun déterminé dans la partie (a).

4. (a) Esquisser la représentation graphique de l'équation $y = x(x-4)^2$. Indiquer les coordonnées à l'origine.
   (b) Résoudre l'inéquation $x(x-4)^2 \geq 0$.

5. Déterminer toutes les valeurs réelles de p et de r qui vérifient le système d'equations :
$$p + pr + pr^2 = 26$$
$$p^2r + p^2r^2 + p^2r^3 = 156$$

6. Soit une équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) qui admet des racines réelles. Démontrer que a, b et c ne peuvent pas être des termes consécutifs d'une suite géométrique.

7. Soit une équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b et c étant des entiers et $a \neq 0$) dont les racines sont des entiers. Résoudre l'équation, sachant que a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

8. Résoudre l'équation $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 = x$.

9. La parabole d'équation $y = (x-2)^2 - 16$ a pour sommet A. Soit B le point qui correspond à la plus grande des abscisses à l'origine. Déterminer l'équation de la droite qui passe aux points A et B.

10. Résoudre l'équation $(x-b)(x-c) = (a-b)(a-c)$ en fonction de a, de b et de c.

11. Sachant que -2 est une racine de l'équation $x^3 - 7x - 6 = 0$, déterminer les deux autres racines.

12. Déterminer la valeur de a pour laquelle l'équation $4x^2 + 4(a-2)x - 8a^2 + 14a + 31 = 0$ admet des racines réelles dont la somme des carrés est un minimum.

13. Soit $f(x) = \dfrac{3x-7}{x+1}$. Soit g la fonction réciproque de f. Déterminer $g(2)$.

14. Soit une fonction définie par $y = -2x^2 - 4ax + k$. Déterminer la valeur de k, sachant que le point $(-2, 7)$ est le point maximum du graphique.

15. Soit a et b les racines de l'équation $x^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) et soit c et d les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ ($c \neq 0$, $d \neq 0$). Déterminer la valeur de $a + b + c + d$.

16. Soit $y = x^2 - 2x - 3$. Déterminer la valeur minimale de l'expression $\dfrac{y-4}{(x-4)^2}$.