Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier n^{o} 2

Solutions

SOLUTIONS

1. On soustrait une équation de l'autre, membre par membre. On obtient :

$$\begin{aligned} xy + y - 8 - 8x &= 0 \\ x(y-8) + y - 8 &= 0 \\ (x+1)(y-8) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $x = -1$ ou $y = 8$. On reporte $x = -1$ dans l'une ou l'autre équation pour obtenir $y = -9$. On reporte $y = 8$ dans l'une ou l'autre équation pour obtenir $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
   Les solutions sont $(-1,\ -9)$, $(4 + 2\sqrt{2}, 8)$ et $(4 - 2\sqrt{2}, 8)$.

2. On cherche l'abscisse du milieu du segment PQ. Cette abscisse est la même que celle du sommet. D'après l'équation canonique de la parabole, cette abscisse est égale à 1.

   Deuxième solution : Posons $y = 0$ pour déterminer les abscisses de P et de Q :

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 4 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 4 \\ x - 1 &= \pm 2 \end{aligned}$$

   Donc $x = 3$ ou $x = -1$. Donc $a = \dfrac{-1+3}{2}$, d'où $a = 1$.

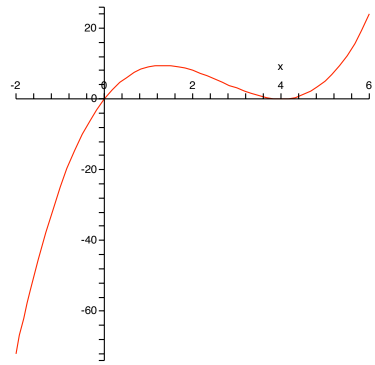
3. (a) On choisit deux valeurs particulières de a, soit $a = 0$ et $a = 1$. On obtient les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = x^2 + 2x + 1$. Aux points d'intersection de ces deux paraboles, on a $x^2 = x^2 + 2x + 1$, d'où $0 = 2x + 1$, ou $x = -\dfrac{1}{2}$. Le point d'intersection des deux paraboles est donc le point $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$. On démontre que ce point vérifie l'équation générale, quelle que soit la valeur de a :

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + a \\ &= \frac{1}{4} + 2a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Donc, toutes les paraboles d'équation $y = x^2 + 2ax + a$ passent par le point $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

   (b) La forme canonique de l'équation $y = x^2 + 2ax + a$ est $y = (x+a)^2 + a - a^2$. Le sommet d'une parabole a donc pour coordonnées $(-a,\, a - a^2)$. Soit $p = -a$ et $q = a - a^2$. On a donc $q = -p^2 - p$, ou $q = -\left(p + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$. Donc, les sommets des paraboles vérifient cette équation qui définit une parabole de sommet $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

4. (a) La courbe a pour ordonnée à l'origine 0 et pour abscisses à l'origine 0 et 4.



(b) D'après le graphique, $x \geq 0$.

5. On factorise pour obtenir :

$$p(1 + r + r^2) = 26 \quad (1)$$
$$p^2r(1 + r + r^2) = 156 \quad (2)$$

On divise l'équation (2) par l'équation (1), membre par membre, pour obtenir $pr = 6$. On reporte $p = \dfrac{6}{r}$ dans l'équation (1) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{6}{r} + 6 + 6r &= 26 \\
6 - 20r + 6r^2 &= 0 \\
3r^2 - 10r + 3 &= 0 \\
(3r - 1)(r - 3) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $r = \frac{1}{3}$ ou $r = 3$, d'où $(r, p) = (\frac{1}{3}, 18)$ ou $(r, p) = (3, 2)$.

6. Si les coefficients étaient les termes consécutifs d'une suite géométrique, alors $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$, d'où $b^2 = ac$. Le discriminant serait alors égal à $-3b^2$. Le discriminant serait donc négatif, ce qui impliquerait que les racines ne sont pas réelles. On aurait alors une contradiction. Donc, les coefficients ne peuvent pas être les termes consécutifs d'une suite géométrique.

7. Soit r et s les racines entières. Le membre de gauche de l'équation est donc égal à :

$$\begin{aligned}
a(x - r)(x - s) &= a(x^2 - (r + s)x + rs) \\
&= ax^2 - a(r + s)x + ars \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

Donc $b = -a(r + s)$ et $c = ars$. Puisque a, b et c forment une suite arithmétique, on a :

$$\begin{aligned}
c - b &= b - a \\
a + c - 2b &= 0 \\
a + ars + 2a(r + s) &= 0 \\
1 + rs + 2(r + s) &= 0 \quad \text{(On peut diviser par } a \text{ puisque } a \neq 0.) \\
(r + 2)(s + 2) &= 3
\end{aligned}$$

Puisque les racines sont des entiers, on a $r+2=1$ et $s+2=3$ (d'où $r=-1$ et $s=1$), $r+2=3$ et $s+2=1$ (d'où $r=1$ et $s=-1$), $r+2=-1$ et $s+2=-3$ (d'où $r=-3$ et $s=-5$) ou $r+2=-1$ et $s+2=-3$ (d'où $r=-3$ et $s=-5$).
Les racines sont 1 et -1 ou bien -3 et -5.

8. **Solution 1**
On développe et on simplifie pour obtenir $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0$. On tente de factoriser le membre de gauche, sachant que le premier coefficient est égal à 1 et que le dernier est égal à -1. On a :

$$\begin{aligned} x^4-6x^3+8x^2+2x-1&=0\\ (x^2+ax+1)(x^2+bx-1)&=0 \end{aligned}$$

On cherche a et b. On développe et on simplifie cette dernière équation pour obtenir :

$$x^4+(a+b)x^3+abx^2+(b-a)x-1=0$$

On compare les coefficients pour obtenir $a+b=-6$, $-a+b=2$ et $ab=8$. D'après les deux premières équations, $a=-4$ et $b=-2$ et ces valeurs vérifient aussi la troisième équation. L'équation initiale devient $(x^2-4x+1)(x^2-2x-1)=0$.
Donc $x^2-4x+1=0$ ou $x^2-2x-1=0$. Les racines sont $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

Solution 2
On remarque que l'équation donnée est de la forme $f(f(x))=x$, où $f(x)=x^2-3x+1$.
Donc, les racines de l'équation $f(x)=x$ sont aussi des racines de l'équation $f(f(x))=x$. L'équation $f(x)=x$ devient $x^2-3x+1=x$, ou $x^2-4x+1=0$, dont les racines sont $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. Or, l'équation initiale, qui est du 4e degré, peut admettre jusqu'à 4 racines réelles. On développe donc son membre de gauche. On sait qu'il est divisible par x^2-4x+1. L'équation devient donc $(x^2-4x+1)(x^2-2x-1)=0$, d'où on obtient les deux autres racines, soit $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$.

9. D'après l'équation canonique, le sommet A a pour coordonnées $(2,-16)$. On pose $y=0$ pour obtenir les abscisses à l'origine -2 et 6. La plus grande des abscisses à l'origine est 6. Donc, B a pour coordonnées $(6,0)$. On cherche l'équation de la droite qui passe aux points $(2,-16)$ et $(6,0)$. On obtient $4x-y-24=0$.

10. **Solution 1**
On dévoppe chaque membre :

$$\begin{aligned} x^2-(b+c)x+bc&=a^2-(b+c)a+bc\\ x^2-(b+c)x+a(b+c-a)&=0\\ x&=\frac{b+c\pm\sqrt{(b+c)^2-4a(b+c-a)}}{2}\\ &=\frac{b+c\pm\sqrt{(b+c-2a)^2}}{2} \end{aligned}$$

Donc $x=a$ ou $x=b+c-a$.

Solution 2
En comparant les deux membres de l'équation, on voit que a est une racine. On développe, comme dans la solution 1, pour obtenir $x^2-(b+c)x+a(b+c-a)=0$. Puisque la somme des racines est égale à $b+c$, l'autre racine est égale à $b+c-a$.

11. Puisque -2 est une racine de l'équation $x^3 - 7x - 6 = 0$, $x+2$ est un facteur du membre de gauche. L'équation devient :

$$\begin{aligned} x^3 - 7x - 6 &= 0 \\ (x+2)(x^2 - 2x - 3) &= 0 \\ (x+2)(x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

Les deux autres racines sont -1 et 3.

12. Soit r et s les racines. D'après les coefficients de l'équation :

$$\begin{aligned} r + s &= \frac{-4(a-2)}{4} \\ &= 2 - a \\ rs &= \frac{-8a^2 + 14a + 31}{4} \\ &= -2a^2 + \frac{7}{2}a + \frac{31}{4} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= (r+s)^2 - 2rs \\ &= (2-a)^2 - 2\left(-2a^2 + \frac{7}{2}a + \frac{31}{4}\right) \\ &= 4 - 4a + a^2 + 4a^2 - 7a - \frac{31}{2} \\ &= 5a^2 - 11a - \frac{23}{2} \end{aligned}$$

À première vue, il semble que la somme des carrés admet une valeur minimale lorsque a est égal à l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y = 5x^2 - 11x - \frac{23}{2}$, c'est-à-dire lorsque $a = \frac{11}{10}$ (que l'on obtient en complétant le carré pour obtenir l'équation canonique). Or, il faut aussi s'assurer que les racines soient réelles. Le discriminant de l'équation initiale est égal à :

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= [4(a-2)]^2 - 4(4)(-8a^2 + 14a + 31) \\ &= 16(a^2 - 4a + 4) + 128a^2 - 224a - 496 \\ &= 144a^2 - 288a - 432 \\ &= 144(a^2 - 2a - 3) \\ &= 144(a-3)(a+1) \end{aligned}$$

Les racines sont donc réelles lorsque $a \geq 3$ ou $a \leq -1$. Or, si $a = \frac{11}{10}$, les racines ne sont pas réelles. La parabole d'équation $y = 5x^2 - 11x - \frac{23}{2}$ est ouverte vers le haut et elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \frac{11}{10}$. On choisit donc pour valeur de a la première valeur de x à la gauche de $\frac{11}{10}$ pour laquelle $y \geq 0$, soit $a = 3$.

13. Soit $g(2) = k$. Puisque g est la fonction réciproque de f, alors $f(k) = 2$. Donc $\frac{3k-7}{k+1} = 2$, d'où $3k - 7 = 2(k+1)$, ou $k = 9$.
Donc $g(2) = 9$.

14. On a :

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 4ax + k \\ &= -2(x^2 + 2ax) + k \\ &= -2(x+a)^2 + k + 2a^2 \end{aligned}$$

Puisque le point $(-2, 7)$ est le point maximum du graphique, alors $-a = -2$ et $k + 2a^2 = 7$, d'où $a = 2$ et $k = -1$.

15. La relation entre les racines et les coefficients de la première équation nous donne :

$a + b = -c$ (1) $ab = d$ (2)

Celle de la deuxième équation nous donne :

$c + d = -a$ (3) $cd = b$ (4)

On reporte $a = -(c+d)$ et $b = cd$ dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} -(c+d) + cd &= -c \\ cd - d &= 0 \\ d(c-1) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $d \neq 0$, alors $c = 1$. D'après (4), $d = b$. D'après (2), $a = 1$. D'après (3), $d = -2$ et $b = -2$.
Donc $a + b + c + d = -2$.

16. La solution la plus directe fait appel au calcul différentiel. Cette solution-ci met en évidence l'expression $(x-4)$ qui permet la division par $(x-4)^2$.

$$\begin{aligned} y - 4 &= x^2 - 2x - 7 \\ &= (x-4)^2 + 6x - 23 \\ &= (x-4)^2 + 6(x-4) + 1 \\ \frac{y-4}{(x-4)^2} &= 1 + \frac{6}{(x-4)} + \frac{1}{(x-4)^2} \end{aligned}$$

Posons $u = \dfrac{1}{(x-4)}$ et $v = \dfrac{y-4}{(x-4)^2}$ $(x \neq 4)$. L'équation devient $v = u^2 + 6u + 1$ ou $v = (u+3)^2 - 8$.
Cette équation, qui n'est pas définie pour $u = 0$, $v = 1$, définit une parabole trouée (au point $(0, 1)$), orientée vers le haut, ayant pour sommet $(-3, -8)$. La valeur minimale de v (et donc de l'expression $\dfrac{y-4}{(x-4)^2}$), est donc de -8.