**Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique**

Ateliers en ligne Euclide

Atelier n° 3

Géométrie analytique

BOÎTE À OUTILS

Voici quelques formules et équations utiles :

Description	**Formule ou équation**
1. Équation cartésienne d'une droite pente : $\dfrac{-A}{B}$ abscisse à l'origine : $\dfrac{-C}{A}$ ordonnée à l'origine : $\dfrac{-C}{B}$	$Ax + By + C = 0$
2. Équation d'une droite de pente m et qui passe par le point (x_0, y_0)	$(y - y_0) = m(x - x_0)$
3. Équation d'une droite qui passe par les points $(a, 0)$ et $(0, b)$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
4. Coordonnées du milieu M du segment AB, où $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$	$\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$
5. Distance D entre les points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$	$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
6. Distance D du point (x_0, y_0) à la droite d'équation $Ax + By + C = 0$	$D = \dfrac{\mid Ax_0 + By_0 + C \mid}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
7. Aire du triangle ABC, où $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x_3, y_3)$	$\dfrac{1}{2} \mid x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 \mid$
8. Équation du cercle de centre (h, k) et de rayon r	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

EXEMPLES DE PROBLÈMES

1. On fait subir à la droite d'équation $2x - 3y - 6 = 0$ une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$. Déterminer l'équation de l'image.

   Solution
   L'image d'un point (a, b) par cette réflexion est le point $(-b, -a)$. En effet, le segment qui joint ces points a une pente de 1 et il est donc perpendiculaire à l'axe de réflexion qui a une pente de -1. De plus, le milieu de ce segment a pour coordonnées $\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ qui vérifient l'équation de l'axe de réflexion. Ce milieu, qui est équidistant des deux points, est donc situé sur l'axe de réflexion. Le point $(-b, -a)$ est donc l'image du point (a, b).

   La droite d'équation $2x - 3y - 6 = 0$ coupe les axes aux points $(3, 0)$ et $(0, -2)$. Chacun de ces points est réfléchi sur des points situés sur l'image de la droite. Le point $(3, 0)$ a pour image $(0, -3)$ et le point $(0, -2)$ a pour image $(2, 0)$. D'après l'item 3 de la boîte à outils, l'image de la droite donnée a pour équation $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$, ou $3x - 2y - 6 = 0$.

2. Soit deux points $A(3, 5)$ et $B(11, 11)$. Déterminer les points P, sur l'axe des abscisses, de manière que le triangle ABP ait une aire de 30.

   Solution 1
   On a $AB = \sqrt{(11-3)^2 + (11-5)^2}$, d'où $AB = \sqrt{8^2 + 6^2}$, ou $AB = 10$.
   La droite AB a pour équation $(y - 11) = \frac{3}{4}(x - 11)$, ou $3x - 4y + 11 = 0$. La base AB du triangle a une longueur de 10.
   La hauteur correspondante doit donc être égale à 6. Donc, la distance du point $P(a, 0)$ à la droite AB est égale à 6. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{|\ 3a - 4\cdot 0 + 11\ |}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} &= 6 \\
\frac{|\ 3a + 11\ |}{5} &= 6 \\
3a + 11 &= \pm 30
\end{aligned}$$

   Donc, $a = -\frac{41}{3}$ ou $a = \frac{19}{3}$. Il y a donc deux points, soit $(6\frac{1}{3}, 0)$ et $(-13\frac{2}{3}, 0)$.

   Solution 2
   Soit $P = (p, 0)$. D'après la formule pour l'aire d'un triangle, dans la boîte à outils :

$$\begin{aligned}
|\ \Delta ABP\ | &= \frac{1}{2}\ |\ x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3\ | \\
30 &= \frac{1}{2}\ |\ 33 + 0 + 5p - 55 - 11p - 0\ | \\
|\ -22 - 6p\ | &= 60
\end{aligned}$$

   Donc $-22 - 6p = \pm 60$, d'où $a = -\frac{41}{3}$ ou $a = \frac{19}{3}$. Il y a donc deux points, soit $(6\frac{1}{3}, 0)$ et $(-13\frac{2}{3}, 0)$.

3. Soit les cercles d'équations $x^2+y^2=4$ et $x^2+y^2-6x+2=0$. Déterminer la longueur de leur corde commune.

Solution
Le premier cercle a pour centre $(0,0)$ et pour rayon 2. On peut écrire l'équation du deuxième cercle sous la forme $(x-3)^2+y^2=7$. Donc, le deuxième cercle a pour centre $(3,0)$ et pour rayon $\sqrt{7}$. Puisque le segment qui joint les centres est horizontal, la corde commune est verticale. Aux points d'intersection des cercles, on a :

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4 &= x^2+y^2-6x+2 \\ 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

On reporte $x=1$ dans l'équation d'un cercle ou de l'autre. On obtient ainsi les points $(1,\sqrt{3})$ et $(1,\,-\sqrt{3})$. La corde commune a donc une longueur de $2\sqrt{3}$.

4. Une droite, qui a une pente de -2, est à 2 unités de l'origine. Déterminer l'aire du triangle formé par la droite et les axes.

Solution
Soit k l'abscisse à l'origine de la droite. Puisque la droite a une pente de -2, son ordonnée à l'origine est égale à $2k$ et son équation est donc $2x+y-2k=0$.
Puisque la distance de l'origine $(0,0)$ à cette droite est égale à 2, alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{2(0)+0-2k}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| &= 2 \\ \left|\frac{2k}{\sqrt{5}}\right| &= 2 \\ |k| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}\times|k|\times|2k|$, ou k^2, ou 5.

TROUSSE DE PROBLÈMES

1. Soit le triangle OCD, où $O(0,0)$, $C(9,0)$ et $D(8,4)$. Une droite verticale coupe le triangle en deux régions de même aire. Déterminer l'équation de la droite.

2. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la droite d'équation $y = x + c$ est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 8$.

3. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les cercles d'équations $x^2 + y^2 = k^2$ et $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 49$ se coupent en un seul point.

4. Un cercle coupe les axes aux points $A(0,10)$, $O(0,0)$ et $B(8,0)$. Une droite, qui passe au point $P(2,\,-3)$, coupe le cercle en moitiés. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite.

5. Le triangle ABC a pour sommets $A(0,0)$, $B(3,3)$ et $C(-4,4)$. Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle CAB.

6. Déterminer la pente et la longueur des deux tangentes au cercle d'équation $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ menées à l'origine.

7. Déterminer l'équation de l'ensemble des points qui sont équidistants des points $C(0,3)$ et $D(6,0)$.

8. Le quadrilatère $KWAD$ est tel que le sommet K est à l'origine, D est sur la partie positive de l'axe des abscisses et les sommets A et W sont situés dans le quadrant I. Soit M et N les milieux respectifs des côtés KW et AD. Si $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, démontrer que les côtés WA et KD sont parallèles.

9. Le point A est situé sur la droite d'équation $4x + 3y - 48 = 0$ et le point B est situé sur la droite d'équation $x + 3y + 10 = 0$. Sachant que le milieu du segment AB a pour coordonnées $(4,2)$, déterminer les coordonnées de A et de B.