Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

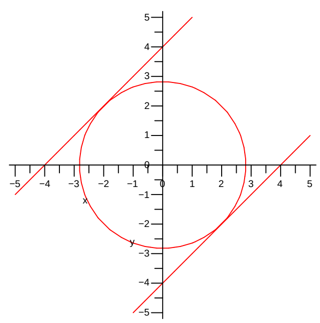
Atelier n^{o} 3

Solutions

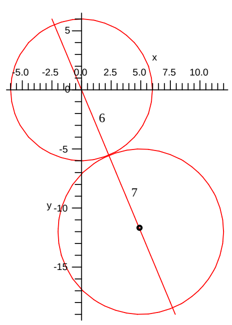
SOLUTIONS

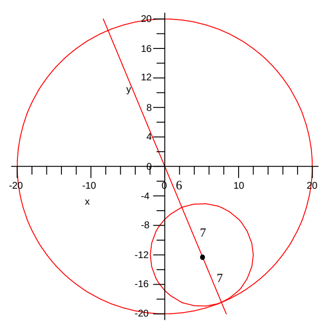
1. La base OC du triangle OCD a une longueur de 9. La hauteur correspondante a une longueur de 4. Donc, le triangle OCD a une aire égale à $\frac{1}{2}(9 \times 4)$, ou 18. Soit $x = k$ l'équation de la droite verticale. La droite qui passe aux points $O(0,0)$ et $D(8,4)$ a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x$. Le point d'intersection K de cette droite et de la droite verticale a donc pour coordonnées $(k, \frac{1}{2}k)$. Soit $L(k,0)$ le point d'intersection de la droite verticale et de l'axe des abscisses. La base OL du triangle a une longueur de k et la hauteur correspondante est égale à $\frac{1}{2}k$. On veut que l'aire du triangle OKL soit égale à 9. On a donc $\frac{1}{2}(k)\left(\frac{1}{2}k\right) = 9$, ou $\frac{1}{4}k^2 = 9$, d'où $k = 6$, car $k > 0$. Donc, la droite verticale a pour équation $x = 6$.

2. Plusieurs approches sont possibles pour résoudre ce problème. Celle-ci fait appel à la distance du centre du cercle à la tangente. Puisque la droite d'équation $y = x + c$ (ou $x - y + c = 0$) est tangente au cercle, alors la distance du centre $(0,0)$ à la tangente est égale au rayon du cercle, soit $2\sqrt{2}$. D'après la formule pour la distance d'un point à une droite, dans la boîte à outils :
$$2\sqrt{2} = \frac{|\, 0 - 0 + c \,|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$
$$2\sqrt{2} = \frac{|\, c \,|}{\sqrt{2}}$$
Donc $|\, c \,| = 4$, d'où $c = \pm 4$.



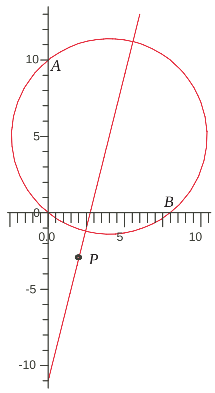
3. Le premier cercle a pour centre $(0,0)$ et pour rayon k ($k > 0$). Le deuxième a pour centre $(5, -12)$ et pour rayon 7. La distance entre les centres est égale à $\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$, ou 13. Les deux cercles peuvent être tangents de façon externe (figure à gauche) ou de façon interne (figure à droite). S'ils sont tangents de façon externe, alors $k + 7 = 13$, d'où $k = 6$. S'ils sont tangents de façon interne, alors $|\, k - 7 \,| = 13$, d'où $k = 20$ ou $k = -6$. Cette dernière valeur est rejetée, puisque $k > 0$. Donc $k = 6$ ou $k = 20$.



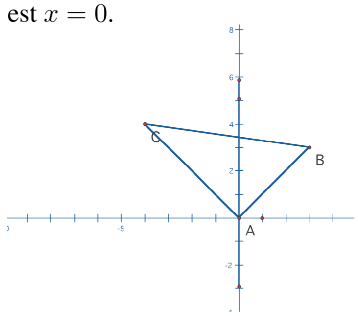


4. **Solution 1 :** Toute droite qui coupe un cercle en moitiés doit passer en son centre. De plus, la médiatrice de n'importe quel corde passe aussi au centre du cercle. On considère la corde du point $(0, 0)$ au point $(0, 10)$. Sa médiatrice est une droite horizontale ayant pour équation $y = 5$. On considère la corde du point $(0, 0)$ au point $(8, 0)$. Sa médiatrice est une droite verticale ayant pour équation $x = 4$. Donc, le centre a pour coordonnées $(4, 5)$. On cherche l'ordonnée à l'origine de la droite qui passe aux points $(4, 5)$ et $P(2, -3)$. La droite a pour équation $y = 4x - 11$ et son ordonnée à l'origine est donc égale à -11.

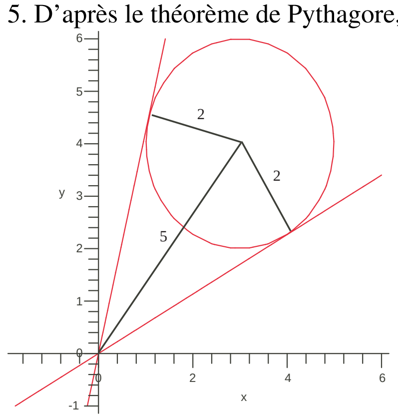
   Solution 2 : Puisque l'angle AOB est rectangle en O, AB est un diamètre du cercle. Son milieu $(4, 5)$ est donc le centre du cercle. On continue comme dans la solution 1 pour déterminer l'équation de la droite qui passe aux points $(4, 5)$ et $P(2, -3)$, soit $y = 4x - 11$. Son ordonnée à l'origine est égale à -11.



5. Puisque AB a une pente de 1 et que AC a une pente de -1, la bissectrice est l'axe des ordonnées et son équation est $x = 0$.



6. Une tangente est perpendiculaire au rayon du cercle au point de contact. D'après l'équation, le cercle a un rayon de 2 et son centre est le point $(3, 4)$. On trace le segment qui joint les points $(0, 0)$ et $(3, 4)$. Il a une longueur de 5. D'après le théorème de Pythagore, les tangentes ont une longueur de $\sqrt{21}$.



   Puisque les tangentes passent à l'origine, elles ont une équation de la forme $y = mx$. On cherche les valeurs de m pour lesquelles la droite d'équation $y = mx$ coupe le cercle en un seul point. Pour déterminer le point d'intersection, on reporte $y = mx$ dans l'équation du cercle :

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (mx-4)^2 &= 4\\ x^2 - 6x + 9 + m^2x^2 - 8mx + 16 &= 4\\ (1+m^2)x^2 - (6+8m)x + 21 &= 0\end{aligned}$$

Cette équation admet une seule solution lorsque le discriminant est nul, c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{aligned}(6+8m)^2 - 4 \cdot 21 \cdot (1+m^2) &= 0\\ 36 + 96m + 64m^2 - 84 - 84m^2 &= 0\\ -20m^2 + 96m - 48 &= 0\\ m &= \frac{12 \pm 2\sqrt{21}}{5}\end{aligned}$$

Donc, les tangentes ont pour pentes $\dfrac{12 \pm 2\sqrt{21}}{5}$.

7. Cet ensemble de points correspond à la médiatrice du segment CD. Or, CD a une pente de $-\dfrac{1}{2}$ et son milieu est le point $M\left(3, 1\frac{1}{2}\right)$. La médiatrice a donc pour équation $y - 1\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-3)$, ou $4x - 2y - 9 = 0$.

8. Soit $K(0,0)$, $W(x,y)$, $A(a,b)$ et $D(d,0)$. Donc, M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{a+d}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$. Puisque $2MN = AW + DK$, alors :

$$2\sqrt{\left(\frac{a+d-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-y}{2}\right)^2} = d + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \quad \text{On met chaque membre au carré :}$$

$$\begin{aligned}(a+d-x)^2 + (b-y)^2 &= d^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2 + 2d\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}\\ 2d(a-x) &= 2d\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}\end{aligned}$$

On divise par $2d$ ($d \neq 0$) et on met chaque membre au carré :

$$\begin{aligned}(a-x)^2 &= (a-x)^2 + (b-y)^2\\ (b-y)^2 &= 0\end{aligned}$$

Donc $b = y$, ce qui implique que la pente de AW est nulle et que AW est donc parallèle à KD.

9. Soit $A(a,c)$ et $B(b,d)$. Puisque ces points sont situés sur les droites données, alors $4a + 3c - 48 = 0$ et $b + 3d + 10 = 0$. Puisque le milieu du segment AB a pour coordonnées $(4,2)$, alors $\dfrac{a+b}{2} = 4$ et $\dfrac{c+d}{2} = 2$, d'où $b = 8 - a$ et $d = 4 - c$. On reporte $b = 8 - a$ et $d = 4 - c$ dans l'équation $b + 3d + 10 = 0$. Avec l'équation $4a + 3c - 48 = 0$, on a 2 équations à 2 inconnues. On obtient $a = 6$, $c = 8$, $b = 2$ et $d = -4$. Donc, A et B ont pour coordonnées respectives $(6,8)$ et $(2, -4)$.