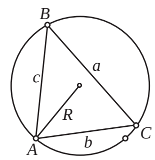
Le Centre d’éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier n° 4

Trigonométrie

BOÎTE À OUTILS

Description	Formule
1. Loi des sinus	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R étant le rayon du cercle circonscrit 
2. Loi du cosinus	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$
3. Aire d'un triangle ABC	$\lvert\triangle ABC\rvert = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B.$
4. Aire d'un triangle équilatéral	L'aire est égale à $\frac{\sqrt{3}c^2}{4}$, c étant la longueur d'un côté.
5. Formule de Héron (aire d'un triangle ABC)	$\lvert\triangle ABC\rvert = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p étant le demi-périmètre : $p = \frac{a+b+c}{2}$
6. Identités trigonométriques	$\tan\theta = \frac{1}{\text{cotan}\,\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $1 + \text{cotan}^2\theta = \text{cosec}^2\theta$
7. Angles supplémentaires	$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$ $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
8. Savoir tracer la représentation graphique de :	$y = A\sin(kx+d)$ (amplitude A, période $\frac{2\pi}{k}$, déphasage $\frac{-d}{k}$) $y = A\cos(kx+d)$ (amplitude A, période $\frac{2\pi}{k}$, déphasage $\frac{-d}{k}$) $y = \tan x$

EXEMPLES DE PROBLÈMES

1. Déterminer les racines de l'équation $2\sin^3 x - 5\sin^2 x + 2\sin x = 0$ dans l'intervalle $0 \le x \le 2\pi$.

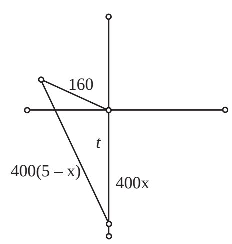
Solution
On factorise le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 2\sin^3 x - 5\sin^2 x + 2\sin x &= 0 \\ \sin x(2\sin^2 x - 5\sin x + 2) &= 0 \\ \sin x(2\sin x - 1)(\sin x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\sin x = 0$ (d'où $x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$), $\sin x = \frac{1}{2}$ (d'où $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$) ou $\sin x = 2$ (qui n'admet aucune solution, car $-1 \le \sin x \le 1$).

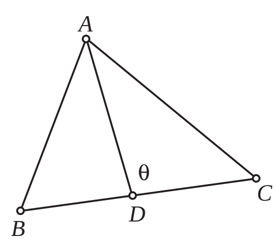
2. Un avion quitte un porte-avion et se déplace en direction sud à une vitesse de 400 km/h. Le porte-avion se déplace en direction $300°$ à une vitesse de 32 km/h. L'avion a suffisamment de carburant pour un vol de 4 h. Quelle est la distance maximale qu'il peut franchir vers le sud de manière qu'il puisse revenir sur le porte-avion ?

Solution
On commence par un dessin. Soit x le nombre d'heures pendant lesquelles l'avion se dirige vers le sud. La distance qu'il parcourt est égale à $400x$ km. Pour revenir, l'avion parcourt une distance de $400(5 - x)$ km en $5 - x$ heures. Pendant les 5 heures, le porte-avion parcourt $5(32)$ km, ou 160 km. La direction du porte-avion est mesurée à partir du nord et l'angle est balayé dans le sens des aiguilles d'une montre. Il y a donc un angle de $120°$ entre la direction sud et la direction du porte-avion. D'après la loi du cosinus, on a :
$(400(5 - x))^2 = 160^2 + (400x)^2 - 2 \cdot 160 \cdot 400x \cdot \cos 120°$



Or $\cos 120° = -\frac{1}{2}$. On divise chaque membre par 6400 pour obtenir $25(5 - x)^2 = 4 + 25x^2 + 10x$, d'où $x = \frac{621}{260}$. Donc avant de revenir, l'avion peut parcourir $400 \times \frac{621}{60}$ km, ou environ 955,4 km.

3. Soit un triangle ABC. On considère le point D, sur le côté BC, de manière que AD soit la bissectrice de l'angle A. Démontrer que $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.



Solution

Les rapports suggèrent l'utilisation de la loi des sinus. Soit $\angle ADC = \theta$.

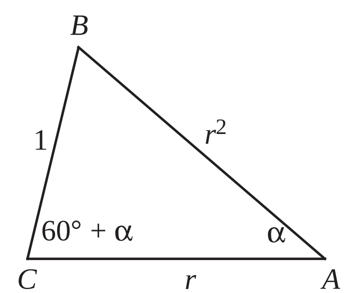
Dans le triangle ADC, on obtient $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{CD} = \dfrac{\sin\theta}{AC}$, d'où $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\theta}$.

Dans le triangle ABD, on obtient $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{BD} = \dfrac{\sin(180^\circ - \theta)}{AB}$, d'où $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\theta}$, car $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$.

Donc $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$, d'où $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$.

Ce résultat est le théorème de la bissectrice d'un triangle.

4. Dans le triangle ABC suivant, $\angle C = \angle A + 60^\circ$, $BC = 1$, $AC = r$ et $AB = r^2$ $(r > 1)$.
Démontrer que $r < \sqrt{2}$.



Solution

Ce problème était le dernier problème du concours Euclide 1996, ce qui indique un degré élevé de difficulté. Comme beaucoup de problèmes difficiles, il fait appel à une variété d'outils.

Soit $\angle A = \alpha$. Donc $\angle C = \alpha + 60^\circ$ et $\angle B = 120^\circ - 2\alpha$. D'après la loi des sinus :

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{1} &= \frac{\sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos 60^\circ + \sin 60^\circ\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cotan}\,\alpha + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Puisque la somme des mesures d'angles du triangle est égale à 180°, on a $0 < \alpha < 60^\circ$. Dans cet intervalle, la fonction tangente est croissante et son inverse, la fonction cotangente, est décroissante.

D'après la loi du cosinus :

$$r^2 = 1 + r^4 - 2r^2\cos(120^\circ - 2\alpha) \quad (1)$$

Or :

$$(r^2 - 1)^2 \geq 0, \text{d'où } r^4 + 1 \geq 2r^2 \quad (2)$$

On reporte $r^4 + 1$ de l'inéquation (2) dans l'équation (1) pour obtenir $r^2 \geq 2r^2 - 2r^2\cos(120^\circ - 2\alpha)$, d'où $\cos(120^\circ - 2\alpha) \geq \dfrac{1}{2}$.

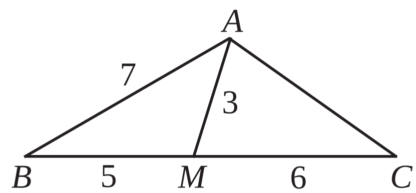
Donc $\alpha \geq 30^\circ$ et $r^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cotan}\,\alpha + \dfrac{1}{2}$, d'où $r^2 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{1} + \dfrac{1}{2}$, ou $r^2 \leq 2$, ce qu'il fallait démontrer.

TROUSSE DE PROBLÈMES

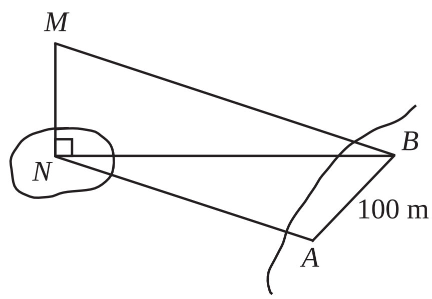
1. (a) Sachant que $2\sin(2\theta)+1=0$, déterminer la plus petite valeur positive possible de θ (en degrés).

   (b) Déterminer toutes les racines de l'équation $2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=8\sin\theta-5$ dans l'intervalle $-\pi\le\theta\le\pi$.

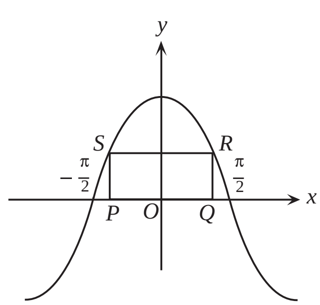
2. On considère un triangle ABC dans lequel $AB=7$. M est un point sur le côté BC de manière que $BM=5$, $MC=6$ et $AM=3$. Déterminer la longueur exacte du côté AC.



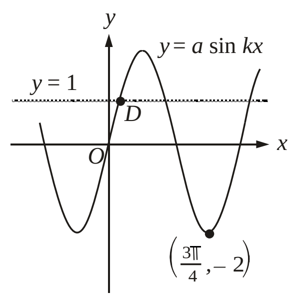
3. Pour déterminer la hauteur MN d'une tour, sur une île, on a choisi deux points, A et B, à 100 m l'un de l'autre, de manière que A, B et N soient situés dans le même plan horizontal. On a ensuite mesuré pour obtenir $\angle NAB=108°$, $\angle ABN=47°$ et $\angle MBN=32°$. Déterminer la hauteur de la tour au mètre près.



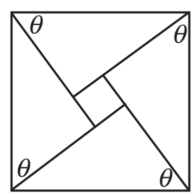
4. Un rectangle $PQRS$ est situé de manière que son côté PQ soit sur l'axe des abscisses. De plus, ses sommets S et R sont situés sur la courbe définie par $y=k\cos x$. Sachant que le côté PQ a une longueur de $\frac{\pi}{3}$ et que le rectangle a une aire de $\frac{5\pi}{3}$, déterminer la valeur de k.



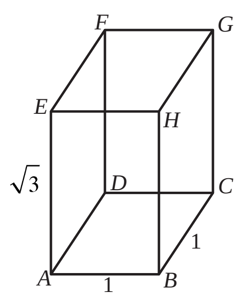
5. La figure suivante présente la courbe définie par $y = a \sin kx$. Le point $\left(\frac{3\pi}{4}, -2\right)$ est un point minimum. La droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe au point D. Déterminer les coordonnées de D.



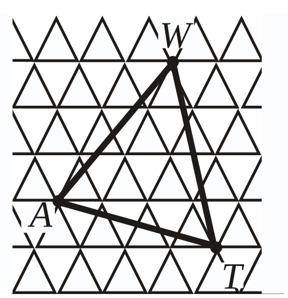
6. Un petit carré, qui a une aire de 9 cm^2, est entouré de quatre triangles congruents, de manière à former un grand carré qui a une aire de 89 cm^2. Comme il est indiqué dans la figure suivante, chaque triangle a un angle θ. Déterminer la valeur de $\tan \theta$.



7. Un prisme droit a une hauteur de $\sqrt{3}$ cm et sa base carrée a des côtés de 1 cm. Déterminer le cosinus de l'angle FAC.



8. Chaque petit triangle équilatéral qui forme la grille suivante a des côtés de longueur 1. Les sommets du triangle WAT sont des sommets de ces petits triangles équilatéraux. Déterminer l'aire du triangle WAT.



9. Soit un triangle ABC dans lequel $AB = 8$ et $\angle CAB = 60°$. Les côtés BC et AC ont des côtés de longueurs respectives a et b, chacune étant un entier. Déterminer les valeurs possibles de a et de b.