**Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique**

# Ateliers en ligne Euclide

## Atelier n° 4

## *Solutions*

## SOLUTIONS

1. (a) Puisque $\sin 2\theta = -\frac{1}{2}$, alors $2\theta = 210°$ ou $2\theta = 330°$, d'où $\theta = 105°$ ou $\theta = 165°$.
   La plus petite valeur de $\theta$ est de $105°$.

   (b)
$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta \\ 2(2\sin^2\theta - 1) &= 8\sin\theta - 5 \\ 4\sin^2\theta - 8\sin\theta + 3 &= 0 \\ (2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 3) &= 0\end{aligned}$$

   Donc $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ou $\sin\theta = \frac{3}{2}$. Or, la deuxième valeur est rejetée, puisqu'on a toujours $-1 \leq \sin\theta \leq 1$.
   Donc $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

2. Soit $\angle AMC = \theta$. D'après la loi du cosinus dans le triangle $ABM$, on a :
$$\begin{aligned}49 &= 9 + 25 - 30\cos(180° - \theta) \\ 15 &= -30\cos(180° - \theta) \\ \cos(180° - \theta) &= -\frac{1}{2} \\ \cos\theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
   D'après la loi du cosinus dans le triangle $AMC$, on a :
$$\begin{aligned}AC^2 &= 9 + 36 - 36\cos\theta \\ &= 27 \\ AC &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

3. D'après la loi du sinus dans le triangle $ABN$, $\frac{BN}{\sin 108°} = \frac{100}{\sin 25°}$. Or, dans le triangle $BMN$, on a $\frac{MN}{BN} = \tan 32°$. Donc $MN = 100 \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 25°} \cdot \tan 32°$, d'où $MN \approx 141$ m.

4. Puisque le rectangle a une longueur de $\frac{\pi}{3}$ et une aire de $\frac{5\pi}{3}$, il a une hauteur de 5. Puisque la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, $PO = OQ = \frac{\pi}{6}$. Or $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $k = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

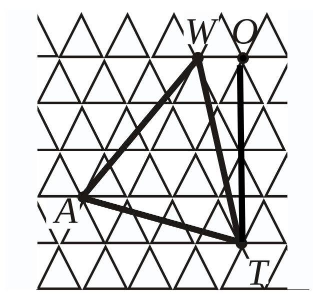
5. Puisque le point minimum a une ordonnée de $-2$, la courbe a une amplitude de 2 et $a = 2$. Puisque la courbe d'équation $y = \sin x$ admet un point minimum $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ et que la courbe donnée admet un point minimum $\left(\frac{3\pi}{4}, -2\right)$, celle-ci est l'image de l'autre par une élongation $(x, y) \to (\frac{1}{2}x, 2y)$. Donc $k = 2$. Donc au point $D$, on a $1 = 2\sin 2x$, ou $\sin 2x = \frac{1}{2}$, d'où $2x = \frac{\pi}{6}$. Donc, $D$ a pour coordonnées $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$.

6. Soit $a$ la longueur d'un côté opposé à $\theta$ dans un triangle et $b$ la longueur d'un côté adjacent à $\theta$. On a donc $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ et $a - b = 3$. L'aire totale des triangles est égale à $4\left(\dfrac{1}{2}ab\right)$, ou $2ab$. Or, elle est aussi égale à $89 - 9$, ou $80$. Donc $b = \dfrac{40}{a}$, que l'on reporte dans l'équation $a - b = 3$. Donc $a - \dfrac{40}{a} = 3$, ou $a^2 - 3a - 40 = 0$, ou $(a-8)(a+5) = 0$. Donc $a = 8$ ou $a = -5$. Puisque $a$ est positif, alors $a = 8$ et $b = 5$. Donc $\tan\theta = \dfrac{8}{5}$.

7. D'après le théorème de Pythagore dans les triangles $FAD$, $FCD$ et $ABC$, on a $FA = 2$, $FC = 2$ et $AC = \sqrt{2}$. D'après la loi du cosinus dans le triangle $FAC$, on a :

$$\begin{aligned} FC^2 &= FA^2 + AC^2 - 2 \cdot FA \cdot AC \cdot \cos(\angle FAC) \\ 4 &= 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}\cos(\angle FAC) \\ \cos(\angle FAC) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

8. D'après le théorème de Pythagore, chaque petit triangle a une hauteur de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Soit $O$ le sommet immédiatement à la droite de $W$. On considère le triangle rectangle $WOT$. La hauteur $OT$ correspond à la hauteur de quatre petits triangles. Donc $OT = 2\sqrt{3}$. De plus, $WO = 1$. D'après le théorème de Pythagore, $WT = \sqrt{1 + 4 \cdot 3}$, ou $WT = \sqrt{13}$. D'après le 4e item de la boîte à outils, l'aire du triangle $WAT$ est égale à $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.




9. D'après la loi du cosinus :

$$\begin{aligned} a^2 &= 64 + b^2 - 16b(\cos 60^\circ) \\ &= b^2 - 8b + 64 \\ &= (b-4)^2 + 48 \\ a^2 - (b-4)^2 &= 48 \\ (a+b-4)(a-b+4) &= 48 \end{aligned}$$

Puisque $a$ et $b$ sont des entiers strictement positifs, chaque facteur doit être un entier. De plus, ils doivent être tous les deux positifs ou tous les deux négatifs, puisqu'ils ont un produit positif. Or, puisque la somme des deux parenthèses est égale à $2a$, les deux facteurs doivent être positifs. On peut même conclure que $a$ et $b$ doivent être tous les deux pairs ou tous les deux impairs. En effet, si $a$ et $b$ sont de parité différente, leur somme et leur différence sont impaires et chaque parenthèse est alors impaire. Or, puisqu'elles ont un produit pair, elles doivent toutes deux être paires. Les possibilités, pour les parenthèses, peuvent être $2 \times 24$, $4 \times 12$, $6 \times 8$, $8 \times 6$, $12 \times 4$ ou $24 \times 4$. Dans chaque cas, on obtient un système de 2 équations à 2 inconnues. (Par exemple, si $a + b - 4 = 2$ et $a - b + 4 = 24$, on résout pour obtenir $a = 13$ et $b = -7$. Cette solution est rejetée, car $b$ ne peut être négatif.) On obtient, pour $(a, b)$, les valeurs $(13, 15)$, $(8, 8)$, $(7, 5)$ et $(7, 3)$.