Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier n^o^ 5

Suites et séries

La plupart des problèmes de cette trousse font appel à des formules associées à des suites arithmétiques ou géométriques ; quelques-uns font appel à des sommes ou à d'autres suites.

BOÎTE À OUTILS

Suites arithmétiques

Dans une suite arithmétique chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante (positive ou négative) appelée *raison arithmétique* et notée d. Le premier terme est noté a. Le $n^{\text{ième}}$ terme est noté t_n.

$k^{\text{ième}}$ terme	$t_k = a + (k-1)d$
Somme des n premiers termes	$S_n = \frac{n}{2}(a + t_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$
Sommes égales de 2 termes	$t_k + t_l = t_m + t_n$ si et seulement si $k + l = m + n$

Suites géométriques

Dans une suite géométrique chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante appelée *raison géométrique* et notée r. Le premier terme est noté a. Le $n^{\text{ième}}$ terme est noté t_n.

$k^{\text{ième}}$ terme	$t_k = ar^{k-1}$
Somme des n premiers termes	$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$
Produits égaux de 2 termes	$t_k t_l = t_m t_n$ si et seulement si $k + l = m + n$
Somme à l'infini	Si $\lvert r\rvert < 1$, la somme à l'infini est égale à : $S = \dfrac{a}{1-r}$

Divers

Voici quelques formules pour la somme des termes de suites qui paraissent souvent dans des concours.

Somme des n premiers entiers positifs	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Somme des carrés des n premiers entiers positifs	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Somme des cubes des n premiers entiers positifs	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
Séries téléscopiques	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$

EXEMPLES DE PROBLÈMES

1. Quelle est la somme des multiplies de 7 ou de 11 qui sont inférieurs à 1000 ?

Solution
On semble chercher la valeur de $(7+14+21+28+\ldots+994)+(11+22+33+\ldots+990)$. Or, les multiples de 77 paraissent dans les deux parenthèses, ce qui fait qu'on les compterait deux fois ; il faut donc les soustraire de cette somme.
On cherche donc la valeur de $(7+14+21+28+\ldots+994)+(11+22+33+\ldots+990)-(77+154+\ldots+924)$.
La 1re parenthèse est une suite arithmétique de 142 termes (puisque $994 = 7 \times 142$) ; la 2e parenthèse est une suite arithmétique de 90 termes (puisque $990 = 11 \times 90$) ; la 3e parenthèse est une suite arithmétique de 12 termes (puisque $924 = 77 \times 12$). La somme est donc égale à :

$$\begin{aligned}
&\frac{142}{2}(7+994)+\frac{90}{2}(11+990)-\frac{12}{2}(77+924)\\
&=(71+45-6)(1001)\\
&=(110)(1001)\\
&=110\,110
\end{aligned}$$

2. On considère une suite dans laquelle $t_1 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + 3n^2 + 3n + 1$. Déterminer la valeur de t_{100}.

Solution
Puisque les différences $t_n - t_{n-1}$ ne sont pas constantes, il ne s'agit pas d'une suite arithmétique.
Posons $n = 1$. On obtient $t_2 = 1 + 3 + 3 + 1$, d'où $t_2 = 8$.
Posons $n = 2$. On obtient $t_3 = 8 + 12 + 6 + 1$, d'où $t_3 = 27$.
Puisque $t_1 = 1$, ou $t_1 = 1^3$, il semble bien que $t_n = n^3$ pour tout n.
Pour démontrer que $t_n = n^3$ est une définition équivalente à celle qui est donnée, on considère deux termes consécutifs, soit $t_n = n^3$ et $t_{n+1} = (n+1)^3$. La différence entre ces termes est égale à :

$$\begin{aligned}
t_{n+1} - t_n &= (n+1)^3 - (n)^3\\
&= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n^3\\
&= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

Donc $t_{n+1} = t_n + 3n^2 + 3n + 1$, ce qui était donné. On a donc démontré que $t_n = n^3$, d'où $t_{100} = 100^3$, ou $t_{100} = 1\,000\,000$.

3. Soit a et b deux nombres strictement positifs tels que a, b, $a + b$ et ab forment quatre termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer a.

Solution

Puisque les termes forment une suite géométrique, les rapports de termes consécutifs sont égaux. Donc :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \quad (*)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b}{a+b} \\ a^2 + ab &= b^2 \\ b^2 - ab - a^2 &= 0 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 &= 0 \\ \left(\frac{b}{a}\right) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

On a choisi la racine positive de l'équation, car a et b sont positifs. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{ab} \\ a^2 &= a + b \\ a &= 1 + \frac{b}{a} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

TROUSSE DE PROBLÈMES

1. Dans une suite géométrique, $t_5 + t_7 = 1500$ et $t_{11} + t_{13} = 187\,500$. Déterminer toutes les valeurs possibles des trois premiers termes.

2. Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer la valeur de x, sachant que $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$.

3. Soit x, 4 et y trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de manière que x, 3 et y soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer la valeur de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

4. Trois nombres distincts, dont le produit est égal à 125, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Ils sont aussi les 1er, 3e et 6e termes d'une suite arithmétique. Déterminer ces nombres.

5. Soit T_k le $k$ième nombre triangulaire, c'est-à-dire que $T_k = 1 + 2 + 3 + ... + k$. On sait que $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$, ou $T_k = \frac{k^2 + k}{2}$. Les six premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15 et 21. Déterminer la somme des 200 premiers nombres triangulaires.

6. Les mesures des angles intérieurs d'un pentagone forment une suite arithmétique et un des angles mesure $90°$. Déterminer toutes les mesures possibles du plus grand angle du pentagone.

7. Déterminer quatre entiers a, b, c et d qui vérifient les conditions suivantes :
   - $b + c = 30$
   - $a + d = 35$
   - Les nombres a, b, c et d sont en ordre croissant et ils forment une suite géométrique.
   - La somme des carrés des quatre entiers est égale à 1261.

8. On forme une suite t_1, t_2, t_3 en choisissant t_1 au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, t_2 au hasard dans l'ensemble $\{4, 5, 6\}$ et t_3 au hasard dans l'ensemble $\{7, 8, 9\}$. Quelle est la probabilité pour que t_1, t_2, t_3 soit une suite arithmétique ?

9. La somme de 25 entiers consécutifs est égale à 500. Déterminer le plus petit des 25 entiers.

10. Combien y a-t-il de termes dans la suite arithmétique -1994, -1992, -1990, ..., 1992, 1994 ?

11. La somme des n premiers termes d'une suite est égale à : $S_n = 3^n - 1$
    (a) Soit t_n le $n$ième terme de la suite. Déterminer t_1, t_2 et t_3.
    (b) Démontrer que $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ est une constante, quelle que soit la valeur de n.

12. On considère la suite arithmétique 7, 14, 21, ... Combien y a-t-il de termes de la suite qui sont entre 40 et 28 001 ?

13. Soit f une fonction telle que $f(1) = 2$ et $f(n + 1) = \frac{3f(n) + 1}{3}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Déterminer $f(100)$.

14. On considère toutes les droites définies par une équation de la forme $px + qy = r$ et qui passent par le point $(-1, 2)$. Démontrer que p, q et r forment une suite arithmétique.

15. On considère une suite arithmétique *S* dont les termes sont t_1, t_2, $t_3, \ldots$ De plus, $t_1 = a$ et la raison est égale à *d*. Les termes t_5, t_9 et t_{16} forment une suite géométrique dont la raison est égale à *r*. Démontrer que *S* contient une infinité de suites géométriques de trois termes ayant toutes la même raison géométrique *r*.

16. Dans la suite 5, 3, -2, -5, $\ldots$, chaque terme à partir du troisième est obtenu en soustrayant du terme précédent le terme qui le précède. Déterminer la somme des 32 premiers termes de la suite.

17. On considère la suite définie par $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ et $t_n = \left(\dfrac{n-3}{n-1}\right) t_{n-2}$ lorsque $n \geq 3$. Déterminer t_{1998}.

18. Soit une suite arithmétique dont le $n^{\text{ième}}$ terme est défini par $t_n = 555 - 7n$. Si $S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$, déterminer la plus petite valeur de *n* pour laquelle $S_n < 0$.