Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier n° 5

Solutions

SOLUTIONS

1. Puisque $t_5 + t_7 = 1500$, alors $ar^4 + ar^6 = 1500$, ou $ar^4(1 + r^2) = 1500$. De même, $ar^{10}(1 + r^2) = 187\,500$. Donc :
$$\begin{aligned}\frac{ar^{10}(1+r^2)}{ar^4(1+r^2)} &= 125\\ r^6 &= 125\end{aligned}$$
Donc $r = \pm\sqrt{5}$. On reporte $r^2 = 5$ dans l'équation $ar^4(1 + r^2) = 1500$ pour obtenir $a(25)(6) = 1500$, d'où $a = 10$. Les trois premiers termes sont 10, $10\sqrt{5}$, 50 ou 10, $-10\sqrt{5}$, 50.

2. Soit d la raison arithmétique de la suite. Donc $b - c = -d$, $c - a = 2d$ et $a - b = -d$. On a donc :
$$\begin{aligned}(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) &= 0\\ -dx^2 + 2dx - d &= 0\\ dx^2 - 2dx + d &= 0\\ -d(x-1)^2 &= 0\end{aligned}$$
Puisque $d \neq 0$, alors $x = 1$.

3. Puisque x, 4 et y forment une suite arithmétique, alors $\dfrac{x+y}{2} = 4$. Puisque x, 3 et y forment une suite géométrique, alors $xy = 9$. Donc :
$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{x+y}{xy}\\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

4. Soit a, ar et ar^2 les trois nombres. Puisque leur produit est égal à 125, on a $a^3r^3 = 125$, d'où $ar = 5$. Les trois nombres sont donc $\frac{5}{r}$, 5, $5r$. Soit d la raison de la suite arithmétique. On a donc $5 - \frac{5}{r} = 2d$ et $5r - 5 = 3d$. Si $r \neq 1$, alors $d \neq 0$. Donc :
$$\begin{aligned}\frac{5 - \frac{5}{r}}{5r-5} &= \frac{2d}{3d}\\ \frac{1-\frac{1}{r}}{r-1} &= \frac{2}{3}\\ \frac{r-1}{r(r-1)} &= \frac{2}{3}\\ \frac{1}{r} &= \frac{2}{3} \quad \text{(puisque } r \neq 1)\\ r &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$
Dans ce cas, les nombres sont $\frac{10}{3}$, 5 et $\frac{15}{2}$. Si $r = 1$, alors $d = 0$ et les trois nombres sont 5, 5 et 5. Ils forment alors deux suites triviales.

5. La somme des N premiers nombres triangulaires est égale à :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{k^2+k}{2} &= \frac{\sum_{k=1}^{N} k^2 + \sum_{k=1}^{N} k}{2} \\ &= \frac{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2}}{2} \\ &= \frac{N(N+1)}{4}\left(\frac{2N+1}{3}+1\right) \\ &= \frac{N(N+1)(N+2)}{6}\end{aligned}$$

Donc, la somme des 200 premiers nombres triangulaires est égale à :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{200} \frac{k^2+k}{2} &= \frac{200 \cdot 201 \cdot 202}{6} \\ &= 1\,353\,400\end{aligned}$$

6. Soit $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$ et $a+2d$ les mesures des cinq angles en degrés. Or, la somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone est égale à $540°$. Donc $5a = 540$, ou $a = 108$. Donc, un des deux premiers angles mesure $90°$. Si $a-d = 90$, alors $d = 18$. Les angles mesurent alors $72°$, $90°$, $108°$, $126°$ et $144°$. Si $a-2d = 90$, alors $d = 9$. Les angles mesurent alors $90°$, $99°$, $108°$, $117°$ et $126°$. Le plus grand angle du pentagone mesure donc $126°$ ou $144°$.

7. Puisqu'ils forment une suite géométrique, soit k, kr, kr^2 et kr^3 les quatre entiers strictement positifs. D'après les deux équations, on a :

$$kr + kr^2 = 30 \qquad (1)$$

$$k + kr^3 = 35 \qquad (2)$$

On divise l'équation (2) par l'équation (1), membre par membre :

$$\begin{aligned}\frac{k+kr^3}{kr+kr^2} &= \frac{35}{30} \\ \frac{1+r^3}{r+r^2} &= \frac{7}{6} \quad \text{puisque } k \neq 0 \\ 6r^3 - 7r^2 - 7r + 6 &= 0\end{aligned}$$

On voit, par inspection, que $r = -1$ est une solution. D'après le théorème de factorisation (voir l'atelier 2), on obtient :

$$(r+1)(2r-3)(3r-2) = 0$$

Donc $r = -1$, $r = \dfrac{2}{3}$ ou $r = \dfrac{3}{2}$. Si $r = -1$, l'équation (2) devient $0k = 35$, qui n'admet aucune solution.
Si $r = \dfrac{2}{3}$, l'équation (1) devient $k\left(\dfrac{2}{3}\right) + k\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 30$, d'où $k = 27$.
Si $r = \dfrac{3}{2}$ l'équation (1) devient $k\left(\dfrac{3}{2}\right) + k\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 30$, d'où $k = 8$.
Ces deux valeurs de k donnent les mêmes quatre nombres. En ordre croissant, ce sont 8, 12, 18 et 27.

8. Il y a 3 choix pour le nombre du premier ensemble. Dans chaque cas, il y a 3 choix pour le nombre du deuxième ensemble. Dans chaque cas, il y a 3 choix pour le nombre du troisième ensemble. En tout, il y a donc 27 choix équiprobables. Or, les trois nombres choisis forment une suite arithmétique si $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$, ou $t_1 + t_3 = 2t_2$.
Il y a 5 choix qui vérifient cette condition : $1,4,7$ $1,5,9$ $2,5,8$ $3,5,7$ $3,6,9$
La probabilité est donc égale à $\frac{5}{27}$.

9. Le nombre du milieu, soit le 13e terme, est égal à la moyenne des nombres. Le 13e entier est donc égal à $\frac{500}{25}$, ou 20. Donc, le premier entier est 8.

10. La suite est formée des nombres pairs de -1994 à 1994. Puisque $1994 \div 2 = 997$, il y a 997 nombres positifs, le nombre 0 et 997 nombres négatifs. Il y a donc 1995 termes dans la suite arithmétique.

11. (a) Puisque $S_1 = 3^1 - 1$, ou $S_1 = 2$, alors $t_1 = 2$.
On a $S_2 = t_1 + t_2$. Puisque $S_2 = 8$ et $t_1 = 2$, alors $t_2 = 6$.
On a $S_3 = t_1 + t_2 + t_3$. Puisque $S_3 = 26$, $t_1 = 2$ et $t_2 = 6$, alors $t_3 = 18$.

(b)

$$\begin{aligned}\frac{t_{n+1}}{t_n} &= \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}}\\ &= \frac{(3^{n+1} - 1) - (3^n - 1)}{(3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)}\\ &= \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n - 3^{n-1}}\\ &= \frac{3^n(3-1)}{3^{n-1}(3-1)}\\ &= 3\end{aligned}$$

12. Tous les termes sont des multiples de 7. Le premier terme que l'on compte est 42 et le dernier est 28 000. De plus, 42 est le 6e multiple de 7, tandis que 28 000 est le 4000e multiple de 7. Il y a donc $(4000 - 5)$ termes, ou 3995 termes, entre 40 et 28 001.

13. La deuxième condition peut s'écrire sous la forme $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{3}$. La fonction définit donc une suite arithmétique pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Donc $f(100)$ représente le 100e terme. Il est donc égal à $2 + 99(\frac{1}{3})$, ou 35.

14. Puisque le point $(-1, 2)$ est sur chaque droite d'équation $px + qy = r$, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $-p + 2q = r$, ou $q - p = r - q$. Donc p, q et r forment une sutie arithmétique.

15. Soit a, $a + d$, $a + 2d$, … la suite arithmétique. Donc $t_5 = a + 4d$, $t_9 = a + 8d$ et $t_{16} = a + 15d$. Puisque ces termes forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned}\frac{a+8d}{a+4d} &= \frac{a+15d}{a+8d}\\ (a+4d)(a+15d) &= (a+8d)^2\\ a^2 + 19ad + 60d^2 &= a^2 + 16ad + 64d^2\\ 3ad &= 4d^2\end{aligned}$$

Donc $d = 0$ ou $d = \dfrac{3}{4}a$.
Si $d = 0$, le problème est trivial, car la suite est a, a, a, …, qui contient une infinité de suites géométriques de

trois termes ayant pour raison 1. Si $d = \frac{3}{4}a$, le terme général est égal est $t_k = a+(k-1)\frac{3}{4}a$, ou $t_k = \frac{a}{4}(3k+1)$. On cherche 3 termes, t_l, t_m et t_n, qui forment une suite géométrique. Il faut donc que :

$$\begin{aligned} t_l \cdot t_n &= (t_m)^2 \\ \frac{a}{4}(3l+1) \cdot \frac{a}{4}(3n+1) &= \frac{a^2}{16}(3m+1)^2 \\ (3l+1)(3n+1) &= (3m+1)^2 \end{aligned}$$

Il suffit de choisir, pour l et pour n, des valeurs pour lesquelles $(3l+1)$ et $(3n+1)$ sont des carrés parfaits. Il y en a une infinité, car il y a une infinité de carrés parfaits qui sont 1 de plus qu'un multiple de 3 (p. ex., 16, 25, 49, 64, 100). Soit a et b deux entiers qui sont 1 de plus qu'un multiple de 3 ($a < b$). On définit $(3l+1) = a^2$ et $(3n+1) = b^2$. On a alors $(3l+1)(3n+1) = a^2b^2$ et on peut choisir $(3m+1)^2 = (ab)^2$.

16. Voici les 8 premiers termes : 5, 3, -2, -5, -3, 2, 5, 3, … Les termes de la suite se répètent à tous les 6 termes. De plus, la somme des 6 premiers termes est égale à 0. Donc, la somme des 30 premiers termes est égale à 0. Les 2 termes suivants, soit 5 et 3, ont une somme de 8. Donc, la somme des 32 premiers termes est égale à 8.

17. On a :

$$\begin{aligned} t_4 &= \frac{1}{3}t_2 \\ &= -\frac{1}{3} \\ t_6 &= \frac{3}{5}t_4 \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \\ t_8 &= \frac{5}{7}t_6 \\ &= -\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \\ &\vdots \\ t_{1998} &= -\frac{1995}{1997} \cdot \frac{1993}{1995} \cdot \frac{1991}{1993} \cdot \frac{1989}{1991} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{1997} \end{aligned}$$

18. La suite a pour premier terme 548 et pour raison -7. On a donc $S_n = \frac{n}{2}(1096 + (n-1)(-7))$. La somme est négative lorsque :

$$\begin{aligned} 1096 + (n-1)(-7) &< 0 \\ 1096 &< 7(n-1) \\ 157 &\leq n-1 \\ 158 &\leq n \end{aligned}$$

La plus petite valeur de n pour laquelle $S_n < 0$ est 158.