Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier n° 6

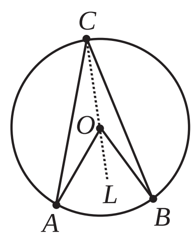
Géométrie du cercle

GÉOMÉTRIE DU CERCLE

Dans le concours Euclide, des problèmes intéressants et parfois difficiles sont souvent tirés de la géométrie, particulièrement de la géométrie du cercle. On présente ici les principaux résultats de la géométrie du cercle. On suppose que les élèves ont déjà une connaissance des propriétés des triangles, y compris des théorèmes de congruence et de similitude, de même que des propriétés des parallélogrammes, des losanges et des trapèzes qui découlent des propriétés des triangles.

Théorème de l'angle inscrit dans un cercle

Ce théorème est la base de tous les résultats qui suivent.
Dans un cercle, un angle au centre qui intercepte un arc AB est deux fois plus grand que n'importe quel angle inscrit qui intercepte le même arc.
(Dans la figure suivante, $\angle AOB = 2\angle ACB$).



Démonstration
On prolonge le segment CO jusqu'à un point L. Puisque OA et OC sont des rayons, le triangle OAC est isocèle. Donc $\angle OAC = \angle OCA$. Puisque l'angle AOL est un angle extérieur au triangle OAC, $\angle OAC + \angle OCA = \angle AOL$. Donc $\angle AOL = 2\,(\angle ACO)$. De même, puisque $OB = OC$, le triangle OBC est isocèle et $\angle BOL = 2\,(\angle BCO)$. Donc $\angle AOB = \angle AOL + \angle BOL$, d'où $\angle AOB = 2\,(\angle ACO + \angle BCO)$, ou $\angle AOB = 2\angle ACB$.

Prolongements
Utiliser des arguments semblables pour démontrer les résultats suivants.

1. Démontrer que si la corde AB est un diamètre, $\angle ACB = 90^\circ$. (Un angle inscrit qui intercepte un diamètre est un angle droit.)

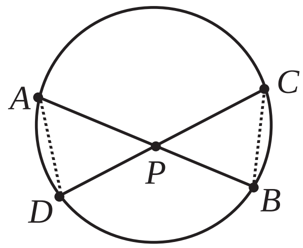
2. Démontrer que le théorème de l'angle inscrit est vrai lorsque la mesure de l'angle AOB est supérieure à 180°.

3. Démontrer que le théorème de l'angle inscrit est vrai lorsque le point C fait en sorte que les segments AC et OB se coupent, c'est-à-dire lorsque l'on fait bouger le point C sur le cercle pour le rapprocher du point B. (Dans cette démonstration, on fait appel à la soustraction au lieu de l'addition.)

4. Soit C_1 et C_2 deux points sur le même arc AB (c.-à-d. sur le grand arc AB ou sur le petit arc AB). Démontrer que $\angle AC_1B = \angle AC_2B$. (On dit que deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont congrus.)

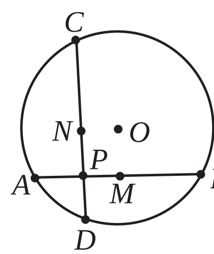
5. Soit C_1 un point sur le petit arc AB et C_2 un point sur le grand arc AB.
Démontrer que $\angle AC_1B + \angle AC_2B = 180^\circ$.
(Dans un quadrilatère inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires.)

Théorème des cordes sécantes
Soit AB et CD deux cordes d'un cercle qui se coupent en un point *P*. Alors $(PA)(PB) = (PC)(PD)$.



Démonstration
On trace les segments AD et BC. Puisque les angles BAD et BCD interceptent le même arc BD, ils sont congrus. De même, $\angle ADC = \angle ABC$. Les triangles ADP et CBP sont semblables, puisque deux de leurs angles sont congrus deux à deux. Donc $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$. On utilise le produit en croix pour obtenir $(PA)(PB) = (PC)(PD)$.

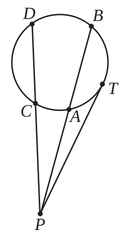
Problème
Soit AB et CD deux cordes perpendiculaires d'un cercle et P leur point d'intersection. Déterminer la longueur du rayon du cercle, sachant que $PA = 4$, $PB = 10$ et $CD = 13$.



Solution
Soit x la longueur de *PC*. D'après le **théorème des cordes sécantes**, $x(13 - x) = 4(10)$, d'où $x = 5$ ou $x = 8$. Soit M et N les milieux respectifs des cordes AB et CD. Donc $MB = \dfrac{10+4}{2}$ et $NC = \dfrac{8+5}{2}$, c'est-à-dire que $MB = 7$ et $NC = \dfrac{13}{2}$. Donc $NP = \left|8 - \dfrac{13}{2}\right|$ ou $NP = \left|5 - \dfrac{13}{2}\right|$. Dans les deux cas, on a $NP = \dfrac{3}{2}$. Puisque le segment qui joint le centre d'un cercle et le milieu d'une corde est perpendiculaire à la corde et que les deux cordes sont perpendiculaires, alors $OMPN$ est un rectangle. Donc $OM = NP = \dfrac{3}{2}$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMB, $r = OB = \sqrt{7^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2}$, ou $r = \dfrac{\sqrt{205}}{2}$.

Prolongement

Dans la figure suivante, PAB et PCD sont deux sécantes d'un cercle issues du point P.
Démontrer que $(PA)(PB) = (PC)(PD)$.



Solution

On considère les triangles PAD et PCB. L'angle APC est commun aux deux triangles. Puisque les angles ADC et ABC interceptent l'arc AC, ils sont congrus. Les triangles PAD et PCB ont donc deux paires d'angles congrus deux à deux. Ils sont donc semblables. Donc $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB}$, d'où $(PA)(PB) = (PC)(PD)$.

Supposons que la sécante PAB est balayée lentement vers la droite, de manière que les points A et B se rapprochent l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'ils arrivent à un point commun T. Pendant ce rapprochement, PA se rapproche de PT et PB se rapproche aussi de PT. On semble donc, à la limite, obtenir $(PA)(PB) = (PT)^2$. Donc, on aurait aussi $(PC)(PD) = (PT)^2$. Utiliser la similitude et la propriété IV ci-dessous pour le démontrer !

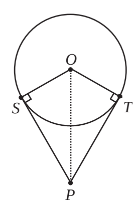
Autres propriétés importantes des tangentes

Soit P un point à l'extérieur d'un cercle. On trace deux tangentes au cercle, PT et PS. Donc :

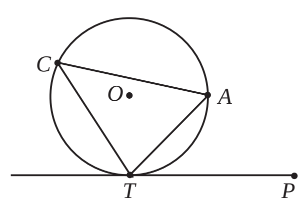
I. Une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon tracé au point de contact. (OT est perpendiculaire à PT.)

II. $PS = PT$: Les deux tangentes issues d'un point à l'extérieur d'un cercle ont la même longueur.

III. OP est la bissectrice de l'angle entre les deux tangentes. (OP est la bissectrice de l'angle TPS.)



IV. Soit TA une corde d'un cercle et PT la tangente au cercle au point T. Soit C un point sur le cercle de manière qu'il ne soit pas à l'intérieur de l'angle PAT. Alors $\angle TCA = \angle PTA$.



Démonstration

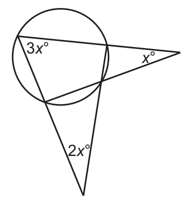
On trace les rayons OT et OA. Puisque la tangente est perpendiculaire au rayon au point de contact,
$\angle PTA = 90° - \angle ATO$, d'où $\angle PTA = \dfrac{1}{2}(180° - \angle ATO - \angle OAT)$, car $\angle OTA = \angle OAT$.
Donc $\angle PTA = \dfrac{1}{2}(\angle AOT)$, d'où $\angle PTA = \angle ACT$.

TROUSSE DE PROBLÈMES

1. Soit un cercle de centre O et deux cordes, AC et BD, qui se coupent en P.
   Démontrer que that $\angle APB = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle COD)$.

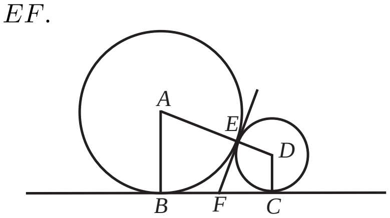
2. Soit A, B, C et D quatre points sur un cercle et soit P, Q, R et S les milieux respectifs des arcs AB, BC, CD et DA. Démontrer que PR est perpendiculaire à QS.

3. Déterminer la valeur de x.

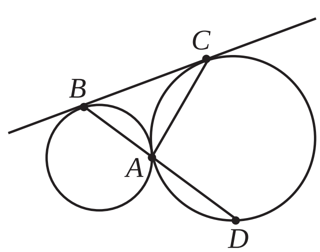


4. Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle. Soit X, Y et Z des points sur les arcs respectifs BC, CA et AB. Démontrer que les cordes AX, BY et CZ sont les hauteurs du triangle XYZ si et seulement si elles sont les bissectrices des angles du triangle ABC.

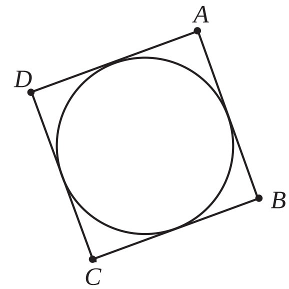
5. Dans la figure suivante, un cercle de centre A et de rayon 9 est tangent à un cercle de centre D et de rayon 4. Les tangentes EF et BC sont communes aux deux cercles et E, B et C sont les points de contact des tangentes aux cercles. Déterminer la longueur EF.



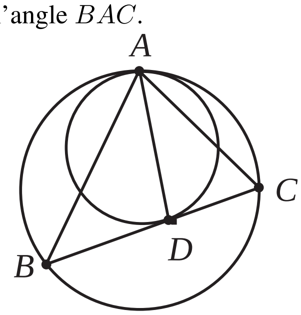
6. Dans la figure suivante, deux cercles sont tangents en A et une tangente est commune aux deux cercles aux points de contact B et C.
   (a) Démontrer que $\angle BAC = 90°$. (Indice : Lorsqu'on a deux cercles tangents l'un à l'autre, il est utile de tracer la tangente commune au point de contact.)
   (b) On prolonge BA de manière à couper le deuxième cercle au point D. Démontrer que CD est un diamètre.



7. Dans la figure suivante, un cercle est inscrit dans un quadrilatère $ABCD$.
Démontrer que $AB + CD = AD + BC$.



8. Dans la figure suivante, les deux cercles sont tangents en A. Le segment BDC est tangent au petit cercle. Démontrer que AD est la bissectrice de l'angle BAC.



9. Au point A_1, sur un cercle, une particule se déplace jusqu'au point A_2, sur le cercle, le long de la corde A_1A_2. Au point A_1, cette corde forme un angle de $35°$ avec la tangente. À partir de A_2, la particule se déplace jusqu'au point A_3, sur le cercle, le long de la corde A_2A_3. Au point A_2, cette corde forme un angle de $37°$ avec la tangente. La particule continue de la même manière. À partir de A_k, elle se déplace jusqu'au point A_{k+1}, sur le cercle, le long de la corde A_kA_{k+1}. Au point A_k, cette corde forme un angle de $(33 + 2k)°$ avec la tangente. Après avoir fait le tour du cercle un nombre de fois, la particule revient pour la première fois au point A_1 en se déplaçant le long de la corde A_nA_1. Déterminer la valeur de n.