Le Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique

Ateliers en ligne Euclide

Atelier nº 6

Solutions

SOLUTIONS

1.

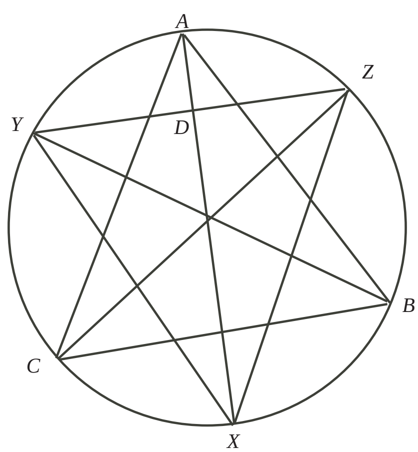
$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle ACB + \angle CBD \quad \text{(angle extérieur du triangle } BPC)\\ &= \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle COD\\ &= \frac{1}{2}\Big(\angle AOB + \angle COD\Big)\end{aligned}$$

2. Soit X le point d'intersection de PR et de QS. D'après la question 1, on a :

$$\begin{aligned}\angle PXQ &= \frac{1}{2}(\angle POQ + \angle ROS)\\ &= \frac{1}{2}(\angle POB + \angle BOQ + \angle ROD + \angle DOS)\\ &= \frac{1}{4}(\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA)\\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

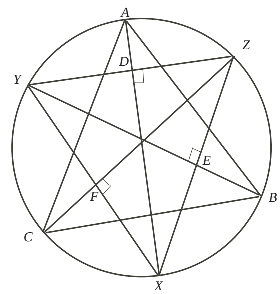
3. Un triangle a un angle qui mesure x° et un autre qui mesure $3x^\circ$. Le troisième angle mesure donc $180^\circ - 4x^\circ$. L'autre triangle a un angle qui mesure $2x^\circ$ et un autre qui mesure $3x^\circ$. Le troisième angle mesure donc $180^\circ - 5x^\circ$. Or, l'angle de $180^\circ - 5x^\circ$ et l'angle de $180^\circ - 4x^\circ$ sont des angles opposés dans le quadrilatère inscrit. Ces mesures ont donc une somme de 180°, d'où $x = 20$.

4. On démontre d'abord que si AX, BY et CZ sont des bissectrices des angles du triangle ABC, alors elles sont les hauteurs du triangle XYZ. Soit D le point d'intersection de AX et de YZ.



Puisque AX, BY et CZ sont des bissectrices des angles du triangle ABC, les angles ACZ, YBC et CAX mesurent chacun la moitié de la mesure des angles respectifs C, B et A du triangle ABC.
Donc $\angle ACZ + \angle YBC + \angle CAX = 90^\circ$.
Or, les angles ACZ et AXZ interceptent l'arc AZ. Ils sont donc congrus. Les angles YZC et YBC interceptent l'arc YC. Ils sont donc congrus. Les angles CAX et CZX interceptent l'arc CX. Ils sont donc congrus.
Par substitution, on a donc $\angle AXZ + \angle YZC + \angle CZX = 90^\circ$. Puisque $\angle YZC + \angle CZX = \angle DZX$, alors

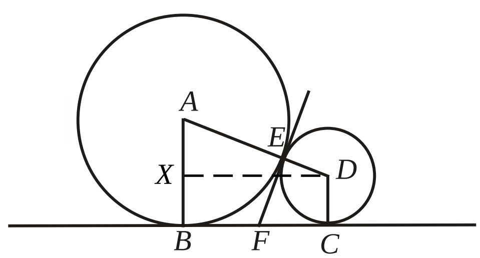
$\angle DXZ + \angle DZX = 90°$.
L'angle DZX du triangle DZX est donc rectangle. Donc, XA est une hauteur du triangle XYZ. Par un argument semblable, BY et CZ sont aussi des hauteurs du triangle XYZ.
On démontre maintenant que si AX, BY et CZ sont les hauteurs du triangle XYZ, elles sont les bissectrices des angles du triangle ABC.
Soit D le point d'intersection de AX et de YZ, E le point d'intersection de BY et de XZ et F le point d'intersection de CZ et XY.



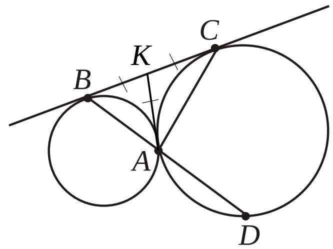
$$\begin{aligned}\text{On a : } \angle BAX &= \angle BYX \quad \text{(ils interceptent la corde } BX\text{)}\\ &= 90° - \angle ZXY \quad \text{(d'après le triangle } EXY\text{)}\\ &= 90° - \angle ZXF\\ &= \angle XZC \quad \text{(d'après le triangle } XZF\text{)}\\ &= \angle XAC \quad \text{(ils interceptent la corde } XC\text{)}\end{aligned}$$

Donc, la corde AX est la bissectrice de l'angle BAC. Par un argument semblable, la corde BY est la bissectrice de l'angle ABC et la corde CZ est la bissectrice de l'angle ACB.

5. Au point D, on abaisse une perpendiculaire DX à AB. Dans le triangle ADX, on a $AD = 4+9$ et $XA = 9-4$, ou $AD = 13$ et $XA = 5$. D'après le théorème de Pythagore, $DX = 12$. Puisque $DCBX$ est un rectangle, alors $BC = 12$. Or, les segments FB, FE et FC sont des tangentes aux cercles menées du point F. On a donc $FB = FE$ et $FE = FC$. Donc $FE = 6$.



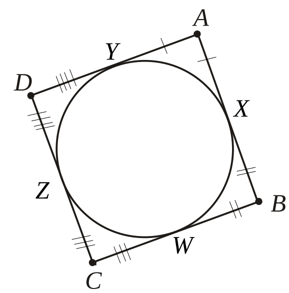
6. (a) Soit K le point d'intersection de la tangente commune au point A et de BC.



Comme dans le problème 5, on a $KB = KA = KC$. Si on trace un cercle de centre K et de diamètre BC, le cercle passera donc par A et l'angle BAC est donc un angle droit.

(b) D'après la partie (a), $\angle CAD = 90°$. Cet angle intercepte donc un diamètre CD.

7. On nomme les points de contact X, Y, Z et W, comme dans la figure.



À chaque sommet, deux tangentes sont menées au cercle. On a donc $AX = AY$, $BX = BW$, $CW = CZ$ et $DZ = DY$. Donc :

$$\begin{aligned} AD + BC &= AY + YD + BW + WC \\ &= AX + DZ + BX + CZ \\ &= AB + CD \end{aligned}$$

8. On trace la tangente KAL au point A. Soit X et Y les points d'intersection respectifs des cordes AB et AC avec le cercle intérieur. On trace la corde XY. On utilise plusieurs fois la propriété IV qui relie une corde à la tangente :

$$\begin{aligned} \angle KAB = \angle KAX &= \angle AYX \quad \text{(propriété IV dans le petit cercle)} \\ &= \angle ADX \quad \text{(angles inscrits qui interceptent l'arc } AX\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle LAY &= \angle AXY \quad \text{(propriété IV dans le petit cercle)} \\ &= \angle ABC \quad \text{(propriété IV dans le grand cercle)} \\ &= \angle ABD \end{aligned}$$

$$\angle DAX = \angle XDB \quad \text{(propriété IV dans le petit cercle)}$$

$$\angle DAY = \angle DXY \quad \text{(angles inscrits qui interceptent l'arc } DY\text{)}$$

Dans le triangle BAD, on a :

$$\angle BAD + \angle ABD + \angle ADX + \angle XDB = 180°$$

Par substitution, au moyen des égalités précédentes, on a :

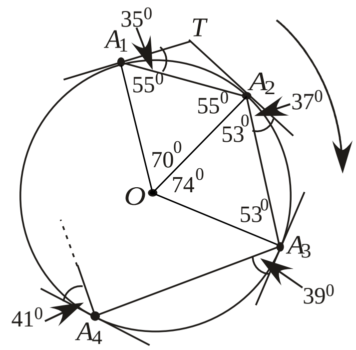
$$\angle BAD + \angle LAY + \angle KAB + \angle DAX = 180°$$

Puisque KAL est un segment de droite :

$$\angle BAD + \angle LAY + \angle KAB + \angle YAD = 180°$$

Donc $\angle DAX = \angle YAD$ et AD est la bissectrice de l'angle BAC.

9. On prolonge les tangentes au points A_1 et A_2 jusqu'à leur point d'intersection T et on trace les rayons A_1O et A_2O. Puisque les tangentes TA_1 et TA_2 sont menées du point T, le triangle TA_1A_2 est isocèle et $\angle A_1A_2T = \angle A_2A_1T = 35°$. On considère le triangle OA_1A_2. Puisque les rayons sont perpendiculaires aux tangentes, $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = 55°$. Donc $\angle A_1OA_2 = 70°$.



De la même manière, on obtient $\angle A_2OA_3 = 74°$ et de façon générale,

$$\angle A_iOA_{i+1} = [70 + 4(i-1)]°.$$

(Dans le développement algébrique suivant, on omet le signe °. Il est entendu que les quantités sont des nombres de degrés.)

La particule revient pour la première fois au point A_1 lorsque $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + ... + \angle A_nOA_{n+1}$ est un multiple de 360°, ce qui permet que A_{n+1} coïncide avec A_1. Or :

$$\begin{aligned}
&\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + ... + \angle A_nOA_{n+1} \\
&= 70 + 74 + 78 + ... + [70 + 4(n-1)] \\
&= 70n + 4\frac{(n-1)(n)}{2} \\
&= 70n + 2n^2 - 2n \\
&= 2n^2 + 68n
\end{aligned}$$

On cherche un petit entier positif k tel que :

$$\begin{aligned}
\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + ... + \angle A_nOA_{n+1} &= 360k \\
2n^2 + 68n &= 360k \\
n^2 + 34n &= 180k \\
n^2 + 34n + 289 &= 180k + 289 \quad \text{(On complète le carré)} \\
(n+17)^2 &= 180k + 289
\end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche est un carré parfait, le membre de droite doit en être un également. Par tâtonnements, en prenant successivement $k = 1, 2, 3, \ldots$, on détermine que la plus petite valeur de k pour laquelle le membre de droite est un carré parfait est $k = 6$. La valeur correspondante de n est $n = 20$.

On peut vérifier que $70 \cdot 20 + 4\frac{19 \cdot 20}{2}$ est égal à 2160, qui est un multiple de 360.