Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2015

(7^{e} et 8^{e} années – Secondaire I et II)

le mercredi 13 mai 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 mai 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2014 University of Waterloo

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Steve Brown
Ersal Cahit
Heather Culham
Serge D'Alessio
Frank DeMaio
Janine Dietrich
Jennifer Doucet
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
John Galbraith
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Judith Koeller
Bev Marshman
Mike Miniou
Dean Murray
Jen Nelson
J.P. Pretti
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
JoAnn Vincent
Tim Zhou

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, King George P.S., Guelph, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Chris Wu, Zion Heights J.H.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7e année

1. Le cercle est divisé en 4 régions égales. Puisque 1 des régions est ombrée, $\frac{1}{4}$ du cercle est ombré.
RÉPONSE : (C)

2. On a : $10 \times (5 - 2) = 10 \times 3 = 30$.
RÉPONSE : (D)

3. D'après le diagramme, Phil a parcouru 4 km, Théo a parcouru 6 km, Paul a parcouru 2 km, Amal a parcouru 8 km et Sanjay a parcouru 7 km. Donc, Paul a parcouru la plus petite distance.
RÉPONSE : (C)

4. D'après la balance, 2 rectangles ont la même masse que 6 cercles.
Si on divise les objets en deux piles égales de chaque côté de la balance, on voit que 1 rectangle a la même masse que 3 cercles.
RÉPONSE : (B)

5. Parmi les choix de réponse, la longueur de votre pouce est la plus près de 5 cm.
RÉPONSE : (E)

6. Il y a 100 centimètres dans 1 mètre. Dans 3,5 mètres, il y a donc 3,5 × 100 cm, ou 350 cm.
RÉPONSE : (A)

7. Le côté du haut a une longueur égale à la somme des longueurs des deux autres côtés horizontaux, soit $2 + 3$, ou 5. Le périmètre de la figure est donc égal à $5 + 5 + 2 + 3 + 3 + 2$, ou 20.
RÉPONSE : (D)

8. Puisque Hanna a compté une moyenne de 13 points par partie pour un total de 312 points, on a $13 + 13 + 13 + \cdots + 13 = 312$, ou $? \times 13 = 312$.
Puisque $312 \div 13 = 24$, alors $24 \times 13 = 312$. Hanna a donc joué 24 parties.
RÉPONSE : (A)

9. On sait que $1 \times 20 = 20$, $2 \times 10 = 20$ et $4 \times 5 = 20$. Les diviseurs positifs de 20 sont donc 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
Le nombre 20 a donc 6 diviseurs positifs.
RÉPONSE : (B)

10. Avec 4 comme premier chiffre, on peut former les nombres 479 et 497.
Avec 7 comme premier chiffre, on peut former les nombres 749 et 794.
Avec 9 comme premier chiffre, on peut former les nombres 947 et 974.
En utilisant les chiffres 4, 7 et 9, sans répéter un chiffre dans un nombre, on peut former 6 nombres entiers de trois chiffres.
RÉPONSE : (A)

11. *Solution 1*
À l'école de Gaussville, 40 % des 480 élèves ont voté pour les maths. Or $40\,\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$.
Puisque 1 dixième de 480 est égal à 48, alors 4 dixièmes de 480 égalent 4×48, ou 192.
Donc, 192 élèves ont voté pour les maths.

Solution 2
À l'école de Gaussville, 40 % des 480 élèves, ou 0,4 des 480 élèves ont voté pour les maths.
Le nombre d'élèves qui ont voté pour les maths est donc égal à $0{,}4 \times 480$, ou 192.
RÉPONSE : (B)

12. Le premier pli forme 2 épaisseurs de papier. Le 2^{e} pli place 2 couches de 2 épaisseurs l'une sur l'autre pour un total de 4 épaisseurs. De même, le 3^{e} pli place 2 couches de 4 épaisseurs l'une sur l'autre pour un total de 8 épaisseurs.
Donc, chaque pli place 2 couches l'une sur l'autre du nombre précédent dépaisseurs, ce qui double le nombre d'épaisseurs.
Le tableau suivant représente le nombre d'épaisseurs après chacun des 5 premiers plis.

Nombre de plis	0	1	2	3	4	5
Nombre d'épaisseurs	1	2	4	8	16	32

Après 5 plis, la feuille compte 32 épaisseurs.

Réponse : (B)

13. *Solution 1*
Les multiples de 5, entre 1 et 99, sont :

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95$$

Parmi ces multiples, seuls $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ et 90 sont pairs.
Il y a donc 9 entiers pairs, entre 1 et 99, qui sont des multiples de 5.

Solution 2
Pour obtenir un multiple pair de 5, il faut multiplier 5 par un entier pair (si on multipliait l'entier impair 5 par un entier impair, on obtiendrait un entier impair).
On a donc : $2 \times 5 = 10$, $4 \times 5 = 20$, $6 \times 5 = 30$, $\ldots$, $18 \times 5 = 90$, $20 \times 5 = 100$. Le plus petit multiple pair de 5 est 10 et le plus grand multiple pair de 5 inférieur à 99 est 90.
Il y a 9 multiples pairs de 5 entre 1 et 99.

Réponse : (C)

14. On considère la valeur de U dans le tableau ci-contre.
Puisqu'il y a un 3 dans la 2^{e} rangée, U ne peut être égal à 3 (chacun des nombres 1, 2 et 3 ne parait qu'une fois dans chaque rangée).
Puisqu'il y a un 1 dans la 3^{e} colonne, U ne peut être égal à 1 (chacun des nombres 1, 2 et 3 ne parait qu'une fois dans chaque colonne).
Puisque U n'est pas égal à 3 ou à 1, alors $U = 2$.
Puisque la 2^{e} rangée contient un 2 et un 3, alors $X = 1$. Puisque la 3^{e} colonne contient un 1 et un 2, alors $Y = 3$.
Donc $X + Y = 1 + 3$, ou $X + Y = 4$.

		1
3	X	U
		Y

Réponse : (E)

15. Le rectangle a une aire de $(5 \times 12)\,\text{cm}^2$, ou $60\,\text{cm}^2$.
Les deux triangles non ombrés sont isométriques. Leur aire est égale à $\frac{1}{2} \times 2 \times 5\,\text{cm}^2$, ou $5\,\text{cm}^2$.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $(60 - 5 - 5)\,\text{cm}^2$, ou $50\,\text{cm}^2$.

Réponse : (E)

16. Une pièce de 25 ¢, une pièce de 10 ¢ et une pièce de 5 ¢ ont une valeur totale de 25 ¢ + 10 ¢ + 5 ¢, ou 40 ¢.
Puisque vous avez le même nombre de pièces de chaque sorte, vous pouvez placer les pièces en piles contenant chacune une pièce de 25 ¢, une pièce de 10 ¢ et une pièce de 5 ¢.
Chaque pile a une valeur de 40 ¢ et puisque $440 \div 40 = 11$, vous avez 11 piles, c'est-à-dire 11 pièces de 25 ¢, 11 pièces de 10 ¢ et 11 pièces de 5 ¢.
Vous avez donc 11 pièces de 10 ¢.
Remarque : On peut vérifier que 11 × (25 ¢ +10 ¢ +5 ¢) = 11 × 40 ¢ = 440 ¢ = 4,40 $.

Réponse : (B)

17. Au départ, le cube avait 12 arêtes.
Lorsqu'on découpe un coin du cube, on n'enlève aucune de ses arêtes.
En découpant le coin, on ajoute cependant trois nouvelles arêtes, soit celles qui forment la nouvelle face triangulaire. Le nouveau solide a donc $(12 + 3)$ arêtes, ou 15 arêtes.

Réponse : (D)

18. Pour déterminer l'image du segment PQ, on trouve celles des points P et Q et on les joint.
Puisque P est situé à 3 unités au-dessus de l'axe des abscisses, son image est à 3 unités au-dessous de l'axe et les deux points ont la même abscisse.
Le point T est donc l'image de P par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
De même, l'image du point Q sera située à 6 unités au-dessous de l'axe des abscisses, Q et son image ayant la même abscisse.
Le point U est donc l'image de Q par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
Le segment TU est donc l'image du segment PQ par cette réflexion.

Réponse : (B)

19. Puisque les 6 chiffres 142857 sont répétés à l'infini et que $120 = 6 \times 20$, alors le 120^{e} chiffre est un 7 (le 6^{e} chiffre est un 7, le 12^{e} est un 7, le 18^{e} est un 7, $\ldots$, le 120^{e} est un 7).
Donc, le 121^{e} chiffre est un 1, le 122^{e} chiffre est un 4 et le 123^{e} chiffre est un 2.

Réponse : (C)

20. Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les mesures des deux autres angles du triangle ont une somme de $180^\circ - 45^\circ$, ou 135°.
Puisque ces mesures sont dans un rapport de $4 : 5$, on peut les couper en 9 parties égales, soit 4 parties pour le premier angle et 5 parties pour le deuxième.
Puisque $135 \div 9 = 15$, chacune de ces 9 parties mesure 15°. Le premier angle mesure $4 \times 15^\circ$, ou 60°, et le deuxième angle mesure $5 \times 15^\circ$, ou 75°.
On peut vérifier que $60^\circ + 75^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.
Le plus grand angle du triangle mesure 75°.

Réponse : (C)

21. On considère la liste L formée du plus grand nombre de chaque rangée, soit $5, 10, 15, 20, 25$. Les cinq nombres de L ont une somme de $5+10+15+20+25$, ou 75. Les nombres de L proviennent de 5 rangées différentes, mais pas de 5 colonnes différentes, car ils proviennent tous des colonnes 1 ou 5. Donc, le plus grand choix de réponse, 75, n'est pas possible.
Remarque : En prenant un nombre de chaque rangée, soit le plus grand nombre de chaque rangée, pour obtenir L, on s'assure que c'est la seule liste qui a une somme de 75.

Le plus grand choix de réponse, après 75, est 73.
Puisque L a une somme de 75 et qu'elle utilise le plus grand nombre de chaque rangée, on peut obtenir une somme de 73 en remplaçant un des nombres de L par un nombre qui lui est inférieur de 2 ou en remplaçant deux des nombres de L par deux nombres qui leur sont inférieurs de 1. (Tout autre remplacement des nombres de L diminuerait la somme davantage et il faudrait remplacer un autre nombre dans une autre rangée par un nombre supérieur pour maintenir la somme à 73, ce qui est impossible, car les nombres de L sont les plus grands de chaque rangée.)
Par exemple, la liste $3, 10, 15, 20, 25$ (un changement à L) a une somme de 73, de même que la liste $4, 9, 15, 20, 25$ (deux changements à L).
Donc pour obtenir une somme de 73 en choisissant exactement un nombre de chaque rangée, il faudrait choisir au moins trois des nombres de L.
Or, puisque deux des nombres de L proviennent de la colonne 1 et que trois des nombres de L proviennent de la colonne 5, il est impossible de remplacer 1 ou 2 nombres de L, tout en

s'assurant que les 5 nombres de la nouvelle liste proviennent des 5 colonnes. Au moins 2 des nombres de la nouvelle liste proviendront de la colonne 1 ou de la colonne 5.
Il est donc impossible d'obtenir une somme de 73.

Le plus grand choix de réponse, après 75 et 73, est 71.
En choisissant les nombres $3, 9, 14, 20, 25$, on obtient une somme de $3 + 9 + 14 + 20 + 25$, ou 71, tout en satisfaisant à la condition qu'il n'y a pas deux nombres qui proviennent d'une même rangée ou d'une même colonne.
Donc, 71 est la plus grande somme que l'on puisse obtenir.
Remarque : D'autres choix de 5 nombres sont possibles pour une somme de 71, tout en satisfaisant à la condition de l'énoncé.

Réponse : (C)

22. *Solution 1*
On considère un carré particulier qui mesure 6 sur 6 et on travaille à rebours pour déterminer les longueurs des côtés du rectangle.
Puisque la largeur du rectangle a été doublée pour obtenir la largeur de 6, elle était de 3 au départ. Puisque la longueur du rectangle a été réduite de moitié pour obtenir la longueur de 6, elle était de 12 au départ.
Le rectangle mesurait donc 3 sur 12.
Le carré a un périmètre de 4×6, d'où $P = 24$. Le rectangle a un périmètre de $2(3 + 12)$, ou 30.
On voit immédiatement que le périmètre du rectangle n'est pas égal à P, à $2P$ ou à $\frac{P}{2}$.
Est-il égal à $\frac{5}{4}P$? On vérifie : $\frac{5}{4}P = \frac{5}{4}(24) = 5 \times \frac{1}{4}(24) = 5 \times 6 = 30$.
Donc, le rectangle avait un périmètre égal à $\frac{5}{4}P$.

Solution 2
Puisque le carré a un périmètre de P et que les quatre côtés ont la même longueur, chaque côté a une longueur de $\frac{1}{4}P$. On travaille à rebours pour déterminer la longueur des côtés du rectangle.
Puisque la largeur du rectangle a été doublée pour obtenir la largeur de $\frac{1}{4}P$, elle était de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}P$, ou $\frac{1}{8}P$ au départ.
Puisque la longueur du rectangle a été réduite de moitié pour obtenir la longueur de $\frac{1}{4}P$, elle était de $2 \times \frac{1}{4}P$, ou $\frac{1}{2}P$ au départ.
Le rectangle avait donc une largeur de $\frac{1}{8}P$ et une longueur de $\frac{1}{2}P$.
Son périmètre était donc égal à $2 \times \frac{1}{8}P + 2 \times \frac{1}{2}P$, ou $\frac{1}{4}P + P$, ou $\frac{5}{4}P$.

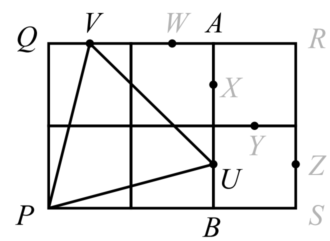
Réponse : (D)

23. *Solution 1*
Tout palindrome de 4 chiffres est de la forme $abba$, a étant un chiffre de 1 à 9 et b étant un chiffre de 0 à 9 (b n'est pas nécessairement différent de a).
Tout palindrome de 5 chiffres est de la forme $abcba$, a étant un chiffre de 1 à 9, b étant un chiffre de 0 à 9 (b n'est pas nécessairement différent de a) et c étant un chiffre de 0 à 9 (c n'est pas nécessairement différent de a ou de b).
Donc pour tout palindrome $abba$ de 4 chiffres, il y a 10 valeurs de c pour lesquelles $abcba$ est un palindrome de 5 chiffres.
Par exemple si $a = 2$ et $c = 3$, le palindrome 2332 peut être utilisé pour créer 10 palindromes de 5 chiffres, soit 23032, 23132, 23232, 23332, 23432, 23532, 23632, 23732, 23832 et 23932.
Donc pour tout palindrome $abba$ de 4 chiffres, il existe exactement 10 palindromes $abcba$ de 5 chiffres. Le rapport du nombre de palindromes de 4 chiffres au nombre de palindromes de 5 chiffres est donc de 1 : 10.

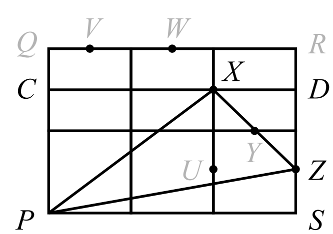
Solution 2
Tout palindrome de 4 chiffres est de la forme $abba$, a étant un chiffre de 1 à 9 et b étant un chiffre de 0 à 9 (b n'est pas nécessairement différent de a).
Il y a 9 choix possibles pour la valeur de a et pour chacun de ces choix, il y a 10 choix possibles pour la valeur de b. En tout, il y a donc 9×10 choix, ou 90 choix pour les deux premiers chiffres ab. Or, chacun de ces choix fixe aussi le choix des deux derniers chiffres (le quatrième chiffre est égal au premier et le troisième chiffre est égal au deuxième).
Il y a donc 90 palindromes de 4 chiffres.
Tout palindrome de 5 chiffres est de la forme $defed$, d étant un chiffre de 1 à 9, e étant un chiffre de 0 à 9 (e n'est pas nécessairement différent de d) et f étant un chiffre de 0 à 9 (f n'est pas nécessairement différent de d ou de e).
Il y a 9 choix possibles pour la valeur de d et pour chacun de ces choix, il y a 10 choix possibles pour la valeur de e. Pour chacun des choix précédents, il y a 10 choix possibles pour la valeur de f. En tout, il y a donc $9 \times 10 \times 10$ choix, ou 900 choix pour les trois premiers chiffres def.
Or, chacun de ces choix fixe aussi le choix des deux derniers chiffres (le cinquième chiffre est égal au premier et le quatrième chiffre est égal au deuxième).
Il y a donc 900 palindromes de cinq chiffres.
Le rapport du nombre de palindromes de 4 chiffres au nombre de palindromes de 5 chiffres est donc de 90 : 900, ou 1 : 10.

Réponse : (E)

24. On suppose que chacun des six carrés mesure 4 sur 4. On calculera ensuite l'aire des cinq triangles pour déterminer celui qui a la plus grande aire.

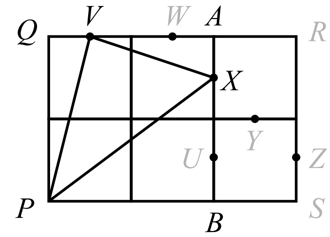


On construit d'abord le triangle PVU et on constate qu'il est contenu dans le carré $QABP$ ci-contre. On peut obtenir l'aire du triangle PVU en soustrayant l'aire des triangles PQV, VAU et PBU de celle du carré $QABP$.
Puisque $QA = 8$ et $AB = 8$, le carré $QABP$ a une aire de 8×8, ou 64.
Puisque $PQ = 8$ et $QV = 2$, le triangle PQV a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 2$, ou 8.
Puisque $VA = 6$ et $AU = 6$, le triangle VAU a une aire de $\frac{1}{2} \times 6 \times 6$, ou 18.
Puisque $PB = 8$ et $UB = 2$, le triangle PBU a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times$, ou 8.
Le triangle PVU a donc une aire de $64 - 8 - 18 - 8$, ou 30.



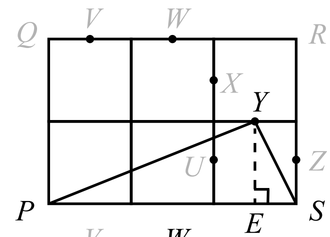
On construit ensuite le triangle PXZ, ainsi que le rectangle $CDSP$ en traçant au point X le segment CD parallèle à PS. Puisque X est le milieu d'un côté d'un carré, C et D sont aussi les milieux de deux côtés de carrés.
On peut obtenir l'aire du triangle PXZ en soustrayant l'aire des triangles PCX, XDZ et PSZ de celle du rectangle $CDSP$.
Puisque $CD = 12$ et $DS = 6$, le rectangle $CDSP$ a une aire de 12×6, ou 72.
Puisque $PC = 6$ et $CX = 8$, le triangle PCX a une aire de $\frac{1}{2} \times 6 \times 8$, ou 24.
Puisque $XD = 4$ et $DZ = 4$, le triangle XDZ a une aire de $\frac{1}{2} \times 4 \times 4$, ou 8.
Puisque $PS = 12$ et $ZS = 2$, le triangle PSZ a une aire de $\frac{1}{2} \times 12 \times 2$, ou 12.
Le triangle PXZ a donc une aire de $72 - 24 - 8 - 12$, ou 28.

On construit le triangle PVX et on constate qu'il est contenu dans le carré $QABP$ ci-contre. On peut obtenir l'aire du triangle PVX en soustrayant l'aire des triangles PQV, VAX et PBX de celle du carré $QABP$.
On a déjà calculé l'aire du carré $QABP$, qui est de 64, et celle du triangle PQV, qui est de 8.

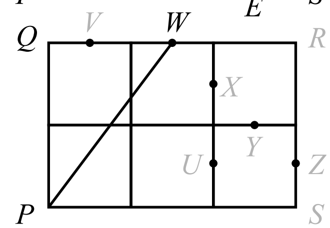


Puisque $VA = 6$ et $AX = 2$, le triangle VAX a une aire de $\frac{1}{2} \times 6 \times 2$, ou 6.
Puisque $PB = 8$ et $XB = 6$, le triangle PBX a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 6$, ou 24.
Le triangle PVX a donc une aire de $64 - 8 - 6 - 24$, ou 26.

On construit le triangle PYS et au point Y, on abaisse une perpendiculaire YE à PS, comme dans la figure ci-contre. On a $PS = 12$ et $YE = 4$ (YE est parallèle à RS et sa longueur est donc égale à celle d'un côté d'un carré). Le triangle PYS a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 12 \times 4$, ou 24.



On construit le triangle PQW ci-contre. Puisque $PQ = 8$ et $QW = 6$, le triangle PQW a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 6$, ou 24.



Les 5 triangles ont une aire respective de 30, 28, 26, 24 et 24.
Le triangle PVU a la plus grande aire.

Réponse : (A)

25. Tous les nombres premiers de deux chiffres sont impairs et pour former un couple inverse de deux nombres premiers de deux chiffres, il faut que les deux chiffres soient impairs (sinon un des deux nombres serait pair).
On remarque aussi que le chiffre 5 ne peut paraitre dans un des deux nombres premiers d'un couple inverse, car un nombre de deux chiffres qui se termine par 5 est divisible par 5 et ne peut donc pas être premier.
On considère donc seulement les nombres premiers impairs suivants pour tenter de former des couples inverses : 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 et 97.
Les seuls couples inverses sont donc 13 et 31, 17 et 71, 37 et 73, 79 et 97.
(Le nombre 11 ne forme pas un nombre différent lorsqu'on renverse l'ordre de ses chiffres. De plus, si on renverse l'ordre des chiffres de 19, on obtient 91, qui n'est pas premier, puisque $7 \times 13 = 91$.)

Pour chacun de ces couples inverses, on doit déterminer les nombres premiers (différents de ceux du couple) de manière que le produit des trois nombres premiers soit inférieur à 10 000.

Le couple inverse 79 et 97 donne un produit de 79×97, ou 7663.
Or, le plus petit nombre premier est 2 et puisque $2 \times 7663 = 15\,326$, ce qui est supérieur à 10 000, le couple inverse 79 et 97 ne peut satisfaire aux conditions de l'énoncé.

On continue de la même façon avec les trois autres couples inverses, en plaçant les résultats dans le tableau suivant.

Nombre premier	Produit du nombre premier et du couple inverse			
	13 et 31	17 et 71	37 et 73	79 et 97
2	$2 \times 13 \times 31 = 806$	$2 \times 17 \times 71 = 2414$	$2 \times 37 \times 73 = 5402$	supérieur à 10 000
3	$3 \times 13 \times 31 = 1209$	$3 \times 17 \times 71 = 3621$	$3 \times 37 \times 73 = 8103$	
5	$5 \times 13 \times 31 = 2015$	$5 \times 17 \times 71 = 6035$	supérieur à 10 000	
7	$7 \times 13 \times 31 = 2821$	$7 \times 17 \times 71 = 8449$		
11	$11 \times 13 \times 31 = 4433$	supérieur à 10 000		
13	13×13 interdit			
17	$17 \times 13 \times 31 = 6851$			
19	$19 \times 13 \times 31 = 7657$			
23	$23 \times 13 \times 31 = 9269$			
29	supérieur à 10 000			
Total	8	4	2	0

Dans n'importe quelle colonne, on peut s'arrêter dès qu'on obtient un produit supérieur à 10 000, car la ligne suivante utilise un nombre premier plus grand, ce qui donnera un produit encore plus grand.

En tout, le nombre d'entiers inférieurs à 10 000 qui satisfont aux conditions de l'énoncé est égal à $8 + 4 + 2$, ou 14.

Réponse : (B)

8e année

1. On a : $1000 + 200 - 10 + 1 = 1200 - 10 + 1 = 1190 + 1 = 1191$

Réponse : (A)

2. Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, alors 40 minutes après 10:20, il est 11:00.
Donc, 45 minutes après 10:20, il est 11:05.

Réponse : (E)

3. Parmi les choix de réponse, la longueur de votre pouce est la plus près de 5 cm.

Réponse : (E)

4. D'après le diagramme, Phil a parcouru 4 km, Théo a parcouru 6 km, Paul a parcouru 2 km, Amal a parcouru 8 km et Sanjay a parcouru 7 km.
On place les distances en ordre croissant : Paul, 2 km ; Phil, 4 km ; Théo, 6 km ; Sanjay, 7 km ; Amal, 8 km.
Dans cette liste ordonnée des 5 distances, la distance médiane est la troisième, celle du milieu.
Donc, Théo a parcouru la distance médiane.

Réponse : (B)

5. *Solution 1*
Puisque $x + 3 = 10$, alors $x = 7$, car $7 + 3 = 10$.
Lorsque $x = 7$, $5x$ a une valeur de $5(7)$, ou 35, et $5x + 15$ a donc une valeur de $35 + 15$, ou 50.
Solution 2
Si on multiplie $x + 3$ par 5, on obtient $5 \times (x + 3)$, ou $5 \times x + 5 \times 3$, ou $5x + 15$ (on peut aussi faire $(x + 5) + (x + 5) + (x + 5) + (x + 5) + (x + 5)$, qui est égal à $5x + 15$).
On sait que $x + 3 = 10$. Donc, 5 fois le membre de gauche est égal à 5 fois le membre de droite.
Donc $5 \times (x + 3)$ est égal à 5×10, ou 50.
Donc, $5x + 15$ est égal à 50.

Réponse : (E)

6. Les deux côtés de longueur 4 contribuent $(4 + 4)$ unités, ou 8 unités, au périmètre du rectangle.
Les deux autres côtés contribuent le reste du périmètre, soit $(42 - 8)$ unités, ou 34 unités.
Puisque les deux autres côtés ont la même longueur, chacun mesure $(34 \div 2)$ unités, ou 17 unités.
Donc, le rectangle mesure 4 sur 17. Il a une longueur de 17.

Réponse : (B)

7. Au départ, le bras gauche contient 4 cercles et 2 rectangles et le bras droit contient 10 cercles, la balance étant en équilibre.
Si on enlève quatre cercles de chaque bras, la balance reste en équilibre, puisqu'on enlève la même masse de chaque bras.
Donc, les 2 rectangles qui restent sur le bras gauche ont la même masse que les 6 cercles qui restent sur le bras droit.
Puisque 2 rectangles ont la même masse que 6 cercles, 1 rectangle a la même masse que 3 cercles.

Réponse : (B)

8. *Solution 1*
1 % de 160 cm est égal à $\frac{1}{100}$ de 160 cm, ou 1,60 cm. Donc, 5 % de 160 cm est égal à $5 \times 1{,}60$ cm, ou 8 cm. (On peut aussi faire : 5 % de 160 cm $= \frac{5}{100} \times 160$ cm $= 0{,}05 \times 160$ cm $= 8$ cm)
Donc, la taille d'Alain a augmenté de 8 cm pour atteindre 160 cm + 8 cm, ou 168 cm.
Solution 2
La taille d'Alain a augmenté de 5 % pendant l'été. À la fin de l'été, elle est égale à 105 % de 160 cm, ou $\frac{105}{100} \times 160$ cm, ou $1{,}05 \times 160$ cm, ou 168 cm.

Réponse : (A)

9. Lorsque $x = 4$ et $y = 2$, alors $x+y = 4+2 = 6$, $xy = 4\times 2 = 8$, $x-y = 4-2 = 2$, $x\div y = 4\div 2 = 2$ et $y \div x = 2 \div 4 = \frac{1}{2}$.
Lorsque $x = 4$ et $y = 2$, l'expression $y \div x$ a la plus petite valeur.

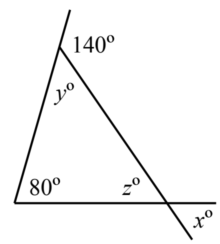
Réponse : (E)

10. *Solution 1*
On évalue le membre de gauche avec 12 pour dénominateur commun : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$.
Le nombre représenté par $\square$ est donc 9.

Solution 2
On sait que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et que $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. Donc $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{9}{12}$.
Le nombre représenté par $\square$ est donc 9.

Réponse : (C)

11. Les angles plats mesurent 180°.
Donc $y° + 140° = 180°$. Donc $y = 40$, puisque $40 + 140 = 180$.
Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°. Donc $40° + 80° + z° = 180°$. Donc $z = 60$, puisque $40 + 80 + 60 = 180$.
Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
Puisque l'angle qui mesure $z°$ est opposé par le sommet à l'angle qui mesure $x°$, alors $x = z = 60$.



Réponse : (C)

12. Puisque le pneu a une circonférence de 1,5 m, alors à chaque rotation du pneu, Sara avance de 1,5 m.
Lorsque Sara parcourt 900 m en vélo, le nombre de rotations de la roue est de $900 \div 1{,}5$, ou 600.

Réponse : (C)

13. Pour déterminer l'image du segment PQ, on trouve celles des points P et Q et on les joint.
Puisque P est situé à 3 unités au-dessus de l'axe des abscisses, son image est à 3 unités au-dessous de l'axe et les deux points ont la même abscisse.
Le point T est donc l'image de P par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
De même, l'image du point Q sera située à 6 unités au-dessous de l'axe des abscisses, Q et son image ayant la même abscisse.
Le point U est donc l'image de Q par une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
Le segment TU est donc l'image du segment PQ par cette réflexion.

Réponse : (B)

14. Dans le tableau suivant, on détermine la somme des trois billets qui restent dans le portefeuille lorsque chacun des quatre billets est retiré.

Billet retiré	Somme des billets qui restent
5 \$	10 \$+20 \$+50 \$=80 \$
10 \$	5 \$+20 \$+50 \$=75 \$
20 \$	5 \$+10 \$+50 \$=65 \$
50 \$	5 \$+10 \$+20 \$=35 \$

Les quatre billets ont la même probabilité d'être retirés. Donc, les quatre sommes ci-dessus, soit 80 \$, 75 \$, 65 \$ et 35 \$, sont équiprobables.
Deux des sommes sont supérieures à 70 \$.
Donc, la probabilité pour que les trois billets qui restent aient une valeur totale supérieure à 70 \$ est de $\frac{2}{4}$, ou 0,5.

Réponse : (A)

15. Le tableau suivant représente la masse de chaque chiot à la fin de chaque mois.

Mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Masse de Victor (kg)	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
Marque de Sancho (kg)	6	8,5	11	13,5	16	18,5	21	23,5	26	28,5	31	33,5	36

Après 12 mois, Sancho a une masse de 36 kg qui est égale à celle de Victor.
(Puisque la masse de Sancho augmente à un taux plus rapide que celle de Victor, c'est la seule fois que les deux chiots auront la même masse.)

Réponse : (D)

16. On doit d'abord déterminer le périmètre du triangle.
Soit x cm la longueur du troisième côté.
Puisque le triangle est rectangle, on a $x^2 = 8^2 + 6^2$ d'après le théorème de Pythagore. Donc $x^2 = 64 + 36$, ou $x^2 = 100$, d'où $x = 10$ (puisque $x > 0$).
Le triangle a donc un périmètre de 10 cm + 8 cm + 6 cm, ou 24 cm.
Le carré a donc un périmètre de 24 cm. Puisque ses côtés ont la même longueur et que $24 \div 4 = 6$, ils mesurent tous 6 cm.
L'aire du carré est donc égale à (6×6) cm^2, ou 36 cm^2.

Réponse : (D)

17. Puisque les 6 chiffres 142857 sont répétés à l'infini et que $120 = 6 \times 20$, alors le 120$^{\text{e}}$ chiffre est un 7 (le 6$^{\text{e}}$ chiffre est un 7, le 12$^{\text{e}}$ est un 7, le 18$^{\text{e}}$ est un 7, ..., le 120$^{\text{e}}$ est un 7).
Donc, le 121$^{\text{e}}$ chiffre est un 1, le 122$^{\text{e}}$ chiffre est un 4 et le 123$^{\text{e}}$ chiffre est un 2.

Réponse : (C)

18. D'après la définition de Δ, on a $p\Delta 3 = p \times 3 + p + 3 = 3p + p + 3 = 4p + 3$.
Puisque $p\Delta 3 = 39$, alors $4p + 3 = 39$. Puisque $36 + 3 = 39$, alors $4p = 36$. Puisque $4 \times 9 = 36$, alors $p = 9$.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*
Au départ, il y avait 3 fois plus de garçons que de filles en classe. Donc, pour chaque fille, il y avait 3 garçons. On pouvait donc placer les élèves en groupes de 4, soit 3 garçons et 1 fille. Seuls les choix de réponse (B), (C), (D) et (E) sont divisibles par 4.
Le tableau suivant représente les nombres respectifs de groupes, de filles et de garçons dans la classe pour chacun des choix de réponse.
Situation au départ :

Choix de réponse	(B)	(C)	(D)	(E)
Nombre d'élèves	20	24	32	40
Nombre de groupes	$20 \div 4 = 5$	$24 \div 4 = 6$	$32 \div 4 = 8$	$40 \div 4 = 10$
Nombre de filles	5	6	8	10
Nombre de garçons	15	18	24	30

Situation à la fin :

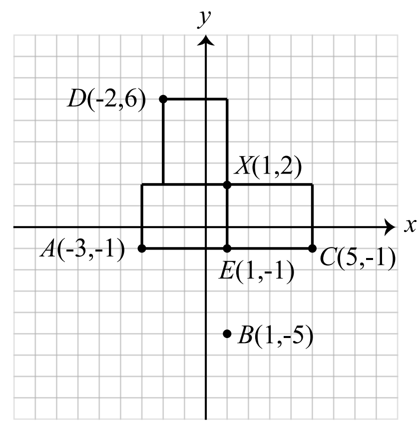
Choix de réponse	(B)	(C)	(D)	(E)
Nombre de filles	$5 - 4 = 1$	$6 - 4 = 2$	$8 - 4 = 4$	$10 - 4 = 6$
Nombre de garçons	$15 - 4 = 11$	$18 - 4 = 14$	$24 - 4 = 20$	$30 - 4 = 26$

D'après l'énoncé, il y a 5 fois plus de garçons que de filles à la fin. Seul le choix de réponse (D) satisfait à cette condition ($20 = 5 \times 4$).
Donc, au départ, il y avait 32 élèves dans la classe.

Solution 2
Au départ, il y a 3 fois plus de garçons que de filles dans la classe. S'il y a x filles, il y a $3x$ garçons.
Lorsque 4 garçons quittent la classe, il reste $3x - 4$ garçons.
Lorsque 4 filles quittent la classe, il reste $x - 4$ filles.
À ce moment, il y a 5 fois plus de garçons que de filles.
On a donc : Nombre de garçons = $5 \times$ Nombre de filles.
Donc $3x - 4 = 5(x - 4)$, d'où $3x - 4 = 5x - 20$. Donc $-4 = 5x - 20 - 3x$, ou $-4 + 20 = 2x$, d'où $2x = 16$, ou $x = 8$.
Il y avait donc 8 filles dans la classe au départ. Le nombre de garçons était égal à 3×8, ou 24.
Au départ, il y avait $8 + 24$ élèves, ou 32 élèves dans la classe.

Réponse : (D)

20. *Solution 1*
Soit X le sommet $(1, 2)$ du rectangle. Les points des choix de réponse sont nommés A, B, C, D et E, comme dans le plan ci-contre.



Le point $E(1, -1)$ est 3 unités au-dessous du point X (puisque les deux points ont la même abscisse et que leur ordonnée diffère de 3). Donc, $E(1, -1)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et E seraient des sommets adjacents du rectangle).

Le point $C(5, -1)$ est situé à 3 unités au-dessous et à 4 unités à la droite du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 3 et leurs abscisses diffèrent de 4). Donc, $C(5, -1)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et C seraient des sommets opposés du rectangle).

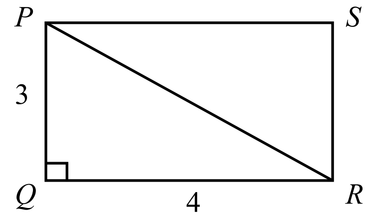
Le point $A(-3, -1)$ est situé à 3 unités au-dessous et à 4 unités à la gauche du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 3 et leurs abscisses diffèrent de 4). Donc, $A(-3, -1)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et A seraient des sommets opposés du rectangle).

Le point $D(-2, 6)$ est situé à 4 unités au-dessus et à 3 unités à la gauche du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 4 et leurs abscisses diffèrent de 3). Donc, $D(-2, 6)$ pourrait être le sommet d'un rectangle 3 sur 4 ayant aussi X pour sommet (X et D seraient des sommets opposés du rectangle).

Il reste le point $B(1, -5)$. Puisque les quatre autres choix de réponse peuvent être les sommets d'un rectangle ayant aussi X pour sommet, alors $(1, -5)$ sont les coordonnées d'un point qui ne peut l'être.
Le point $B(1, -5)$ est situé à 7 au-dessous du point X (puisque leurs ordonnées diffèrent de 7). Comment peut-on montrer qu'il est impossible pour deux sommets d'un rectangle 3 sur 4 d'être à 7 unités l'un de l'autre ? (Voir la Solution 2).

Solution 2

Deux sommets adjacents d'un rectangle 3 sur 4, $PQRS$, sont distants de 3 ou de 4 unités (comme P et Q ou Q et R, ci-contre).



La distance entre deux sommets opposés d'un tel rectangle peut être déterminée par le théorème de Pythagore (Par exemple, la longueur de la diagonale PR peut être déterminée par le théorème de Pythagore.)
Le triangle PQR est un triangle rectangle remarquable 3-4-5.
Donc, $PR = 5$.
La plus grande distance possible entre deux sommets d'un rectangle 3 sur 4 est donc de 5 unités.
Dans la Solution 1, on a vu que la distance entre les points $X(1, 2)$ et $B(1, -5)$ est de 7 unités.
Donc, les coordonnées $(1, -5)$ ne peuvent être les coordonnées d'un rectangle 3 sur 4 qui a aussi $X(1, 2)$ pour sommet.

Réponse : (B)

21. Dans le carré $PQRS$, $PS = SR$ et puisque M et N sont les milieux respectifs de ces côtés, alors $MS = SN$.
L'aire du triangle SMN est égale à $\frac{1}{2} \times MS \times SN$.
Puisque cette aire est égale à 18, alors $\frac{1}{2} \times MS \times SN = 18$, d'où $MS \times SN = 36$, ou $MS = SN = 6$ (puisqu'ils ont la même longueur).
La longueur du côté PS, du carré est deux fois celle de MS, puisque M est le milieu de PS.
Donc $PS = SR = RQ = QP = 12$.
L'aire du triangle QMN est égale à l'aire du carré $PQRS$ moins l'aire des triangles, SMN, NRQ et QPM.
L'aire du carré $PQRS$ est égale à $PS \times SR$, ou 12×12, ou 144.
L'aire du triangle SMN est égale à 18, selon l'énoncé.
L'aire du triangle NRQ est égale à $\frac{1}{2} \times QR \times RN$, ou $\frac{1}{2} \times 12 \times 6$, ou 36 (puisque $SN = RN = 6$).
L'aire du triangle QPM est égale à $\frac{1}{2} \times QP \times PM$, ou $\frac{1}{2} \times 12 \times 6$, ou 36.
L'aire du triangle QMN est donc égale à $144 - 18 - 36 - 36$, ou 54.

Réponse : (E)

22. *Solution 1*
On procède par essais systématiques à partir des choix de réponse.
Dans la première ligne du tableau, il y a 10 billets pour ainés. Il y a donc $(120 - 10)$ billets, ou 110 billets, pour les adultes et les enfants. Puisque le nombre de billets pour adultes est le même que le nombre de billets pour enfants, il y a $110 \div 2$ billets, ou 55 billets pour adultes et 55 billets pour enfants.

N$^{\text{bre}}$ de billets pour ainés	N$^{\text{bre}}$ de billets restants	N$^{\text{bre}}$ de billets pour adultes	N$^{\text{bre}}$ de billets pour enfants	Total des recettes
10	110	55	55	$10 \times 10\,\$ + 55 \times 12\,\$ + 55 \times 6\,\$ = 1090\,\$$
20	100	50	50	$20 \times 10\,\$ + 50 \times 12\,\$ + 50 \times 6\,\$ = 1100\,\$$

La deuxième ligne du tableau satisfait aux conditions de l'énoncé. On a donc vendu 20 billets pour ainés.

Solution 2
Soit a le nombre de billets vendus pour adultes.
Puisque chaque billet pour adultes coute 12 \$, les a billets pour adultes ont rapporté $12 \times a$ dollars, ou $12a$ dollars.
Puisqu'on a vendu le même nombre de billets pour adultes que pour enfants, on a vendu a billets pour enfants. Puisque chaque billet pour enfants coute 6 \$, les a billets pour enfants ont rapporté $6 \times a$ dollars, ou $6a$ dollars.
En tout, les billets pour adultes et les billets pour enfants ont rapporté $(12a + 6a)$ dollars, ou $18a$ dollars.

Puisqu'on a vendu 120 billets en tout et qu'on a vendu a billets pour adultes et a billets pour enfants, alors les $120 - 2a$ billets qui restent ont été vendus aux ainés.
Puisque chaque billet pour ainé coute 10 \$, alors les $(120 - 2a)$ billets pour ainés ont rapporté $10 \times (120 - 2a)$ dollars.
En tout, la vente des billets a rapporté $10 \times (120 - 2a) + 18a$ dollars.

Or, on sait que cette vente a rapporté 1100 \$. Donc $10 \times (120 - 2a) + 18a = 1100$.
On a donc $10 \times 120 - 10 \times 2a + 18a = 1100$, ou $1200 - 20a + 18a = 1100$, d'où $1200 - 2a = 1100$.
Donc $2a = 100$, ou $a = 50$.
Puisqu'on a vendu $120 - 2a$ billets pour ainés, ce nombre est égal à $120 - 2(50)$, ou $120 - 100$, ou 20.

On peut vérifier :
Puisque $a = 50$, on a vendu 50 billets pour adultes et 50 billets pour enfants. On a aussi vendu 20 billets pour ainés.
Le nombre total de billets vendus est donc égal à $50 + 50 + 20$, ou 120, ce qui correspond à l'énoncé.
Les 50 billets pour adultes ont rapporté 50×12 \$, soit 600 \$.
Les 50 billets pour enfants ont rapporté 50×6 \$, soit 300 \$.
Les 20 billets pour ainés ont rapporté 20×10 \$, soit 200 \$.
En tout, les billets ont rapporté 600 \$ + 300 \$ + 200 \$, ou 1100 \$, ce qui correspond à l'énoncé.

RÉPONSE : (B)

23. Les entiers $4, 4, x, y, 13$ sont placés en ordre croissant. Donc $4 \leq x$ et $x \leq y$ et $y \leq 13$.
La somme des cinq entiers est égale à $4 + 4 + x + y + 13$, ou $21 + x + y$. La moyenne de ces cinq entiers est donc égale à $\dfrac{21 + x + y}{5}$.
Puisque la moyenne doit être un entier, $21 + x + y$ doit être divisible par 5, c'est-à-dire que $21 + x + y$ doit être un multiple de 5.
Quelle est la plus petite valeur possible de $21 + x + y$?
Puisque les entiers sont en ordre croissant, la plus petite valeur possible de x est 4, de même que celle de y. C'est-à-dire que les cinq entiers pourraient être 4, 4, 4, 4, 13. Ainsi la plus petite valeur possible de $21 + x + y$ est $21 + 4 + 4$, ou 29.
Quelle est la plus grande valeur possible de $21 + x + y$?
Puisque les entiers sont en ordre croissant, la plus grande valeur possible de y est 13, de même que celle de x. C'est-à-dire que les cinq entiers pourraient être 4, 4, 13, 13, 13. Ainsi la plus grande valeur possible de $21 + x + y$ est $21 + 13 + 13$, ou 47.
Les multiples de 5 entre 29 et 47 sont 30, 35, 40 et 45.

Lorsque $21 + x + y = 30$, alors $x + y = 9$.
Le seul couple (x, y) pour lequel $4 \leq x$ et $x \leq y$ et $y \leq 13$ et $x + y = 9$ est le couple $(4, 5)$.
On recommence pour les multiples 35, 40 et 45 en remplissant le tableau suivant.

Valeur de $21+x+y$	Valeur de $x+y$	Couples (x,y) où $4 \leq x$ et $x \leq y$ et $y \leq 13$
30	$30-21=9$	$(4,5)$
35	$35-21=14$	$(4,10),(5,9),(6,8),(7,7)$
40	$40-21=19$	$(6,13),(7,12),(8,11),(9,10)$
45	$45-21=24$	$(11,13),(12,12)$

Il y a 11 couples (x,y) possibles pour que la moyenne des cinq entiers $4,4,x,y,13$ soit un entier.

Réponse : (E)

24. Les deux coureurs se croisent à toutes les 36 secondes.
Donc en 36 secondes, les deux coureurs parcourent une distance totale qui est égale à un tour de piste. Cette distance est constante, peu importe la vitesse respective des coureurs.
Plus la vitesse constante du premier coureur est grande, plus celle du deuxième coureur est petite, car ensemble, ils doivent faire l'équivalent d'un tour de piste en 36 secondes.
De même, plus la vitesse constante du premier coureur est petite, plus celle du deuxième coureur est grande, car ensemble, ils doivent faire l'équivalent d'un tour de piste en 36 secondes.

On sait que le temps que met le premier coureur pour faire un tour de piste est un nombre de secondes entre 80 et 100.
S'il courait le plus vite possible de manière à pouvoir faire un tour de piste en 80 secondes, alors le deuxième coureur courrait le plus lentement possible.
Soit t_{max} le nombre maximal de secondes que le deuxième coureur mettrait pour faire un tour de piste.
De même, si le premier coureur courait le plus lentement possible de manière à pouvoir faire un tour de piste en 100 secondes, alors le deuxième coureur courrait le plus vite possible.
Soit t_{min} le nombre minimal de secondes que le deuxième coureur mettrait pour faire un tour de piste.

<u>On détermine la valeur de t_{max}</u>

On sait que t_{max} est le nombre de secondes que mettrait le deuxième coureur pour faire un tour de piste lorsque le premier coureur peut faire un tour de piste en 80 secondes.
Dans ces conditions, en 36 secondes, le premier coureur parcourt $\frac{36}{80}$ d'un tour de piste, ou $\frac{9}{20}$ d'un tour de piste.
Pendant ces 36 secondes, les deux coureurs parcourent une distance égale à un tour de piste. Le deuxième coureur parcourt donc $\frac{11}{20}$ d'un tour de piste en 36 secondes. Pour obtenir le temps pour un tour de piste, il faut diviser par $\frac{11}{20}$, ou multiplier par $\frac{20}{11}$. Le deuxième coureur mettrait donc $\frac{20}{11} \times 36$ secondes, ou $\frac{720}{11}$ secondes pour compléter un tour de piste à cette vitesse.
Donc $t_{max} = \frac{720}{11} = 65{,}\overline{45}$.

<u>On détermine la valeur de t_{min}</u>

On sait que t_{min} est le nombre de secondes que mettrait le deuxième coureur pour faire un tour de piste lorsque le premier coureur peut faire un tour de piste en 100 secondes.
Dans ces conditions, en 36 secondes, le premier coureur parcourt $\frac{36}{100}$ d'un tour de piste, ou $\frac{9}{25}$ d'un tour de piste.
Pendant ces 36 secondes, les deux coureurs parcourent une distance égale à un tour de piste. Le

deuxième coureur parcourt donc $1 - \frac{9}{25}$ d'un tour de piste, ou $\frac{16}{25}$ d'un tour de piste.
Pour obtenir le temps pour un tour de piste, il faut diviser par $\frac{16}{25}$, ou multiplier par $\frac{25}{16}$. Le deuxième coureur mettrait donc $\frac{25}{16} \times 36$ secondes, ou $\frac{900}{16}$ secondes pour compléter un tour de piste à cette vitesse.
Donc $t_{min} = \frac{900}{16} = 56{,}25$.

<u>On détermine le produit de la plus petite et de la plus grande des valeurs entières de t</u>

Puisque le deuxième coureur complète un tour de piste en au plus $65{,}\overline{45}$ secondes, la plus grande valeur entière possible de t est de 65 secondes.
Puisque le deuxième coureur complète un tour de piste en au moins 56,25 secondes, la plus petite valeur entière possible de t est de 57 secondes.
Le produit de ces deux valeurs est égal à 57×65, ou 3705.

Réponse : (A)

25. Soit S la somme alternée de l'entier de 7 chiffres $abcdefg$. Donc $S = a - b + c - d + e - f + g$.
Les termes de cette somme peuvent être regroupés en deux parties, soit ceux qui augmentent la somme et ceux qui la diminuent.
On a alors $S = (a + c + e + g) - (b + d + f)$.
Soit A la somme des 4 termes qui augmentent la somme S, c'est-à-dire que $A = a + c + e + g$.
De même, soit D la somme des 3 termes qui diminuent la somme S, c'est-à-dire que $D = b+d+f$.
Puisque $S = (a + c + e + g) - (b + d + f)$, alors $S = A - D$.

On détermine la plus grande valeur possible de S en choisissant les quatre plus grands chiffres, soit $4, 5, 6, 7$ (dans n'importe quel ordre), pour former A et en choisissant les trois plus petits entiers, soit $1, 2, 3$ (dans n'importe quel ordre), pour former D.
La plus grande somme alternée possible est donc $S = (4 + 5 + 6 + 7) - (1 + 2 + 3)$, ou $S = 16$.
On détermine la plus petite valeur possible de S en choisissant les quatre plus petits chiffres, soit $1, 2, 3, 4$ (dans n'importe quel ordre) pour former A, et en choisissant les trois plus grands chiffres, soit $5, 6, 7$ (dans n'importe quel ordre), pour former D.
La plus petite somme alternée possible est donc $S = (1 + 2 + 3 + 4) - (5 + 6 + 7)$, ou $S = -8$.
Puisque S doit être divisible par 11 (avec $S \geq -8$ et $S \leq 16$), alors $S = 11$ ou $S = 0$.
La somme des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 est égale à 28. Puisque chacun des entiers contribue à A ou à D, alors $A + D = 28$.

<u>1er cas : La somme alternée est égale à 11, c.-à-d. que $S = 11$</u>

Puisque $S = 11$ et que $S = A - D$, alors $A - D = 11$. Puisque $A - D$ est égal à 11 (un nombre impair), alors A est pair et D est impair, ou A est impair et D est pair, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être pairs tous les deux ou impairs tous les deux (de façon générale, la différence de deux entiers est impaire si un des entiers est pair et l'autre est impair).
Dans ce cas, la somme de A et D doit aussi être impaire. Or $A + D = 28$, ce qui est un nombre pair.
On a donc une contradiction et il est donc impossible que $S = 11$.
Il n'existe donc aucun entier de 7 chiffres, formé des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, dont la somme alternée est égale à 11.

<u>2e cas : La somme alternée est égale à 0, c.-à-d. que $S = 0$</u>

Puisque $S =$ et que $S = A - D$, alors $A = D$.

Puisque $A + D = 28$, alors $A = D = 14$.
On cherche tous les groupes de trois chiffres, parmi les chiffres de 1 à 7, dont la somme est égale à 14, c'est-à-dire $D = 14$.
Il y a quatre groupes possibles : $(7, 6, 1), (7, 5, 2), (7, 4, 3)$, et $(6, 5, 3)$.
Dans chaque cas, les quatre chiffres qui n'ont pas été choisis, soit $(2, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 2, 5, 6)$, et $(1, 2, 4, 7)$, ont aussi une somme de 14 et on a $A = 14$.
Le tableau suivant résume ces résultats :

4 chiffres pour lesquels $A = 14$	3 chiffres pour lesquels $D = 14$	2 exemples d'entiers de 7 chiffres à partir de ces chiffres
$2, 3, 4, 5$	$7, 6, 1$	$2736415, 3126475$
$1, 3, 4, 6$	$7, 5, 2$	$1735426, 6745321$
$1, 2 ,5 ,6$	$7, 4, 3$	$2714536, 5763241$
$1, 2, 4, 7$	$6, 5, 3$	$4615237, 7645231$

On considère la première rangée du tableau.
Chaque arrangement des 4 chiffres $2, 3, 4, 5$ avec chaque arrangement des 3 chiffres $7, 6, 1$ (les chiffres étant placés en alternance) donne un entier de 7 chiffres dont la somme alternée est égale à 0.
Deux des possibilités sont données (on peut vérifier que $S = 0$ dans chaque cas).
Le nombre d'arrangements des 4 chiffres de la 1re colonne est égal à $4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou 24 (4 choix pour le premier chiffre, 3 choix pour le deuxième, 2 choix pour le troisième et 1 choix pour le dernier). De même, le nombre d'arrangements des 3 chiffres de la 2e colonne est égal à $3 \times 2 \times 1$, ou 6. Pour chacun des 24 arrangements des chiffres de la 1re colonne, il y a 6 arrangements des chiffres de la 2e colonne, pour un total de 24×6 arrangements, ou 144 arrangements.
Dans chacun de ces cas, $A = D = 14$ et puisque $S = A - D$, alors $S = 0$. Chacun des 144 entiers obtenus est donc divisible par 11.
De même, il existe 144 entiers divisibles par 11 que l'on peut obtenir avec les chiffres des trois autres rangées du tableau.
En utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, on peut donc former 4×144 entiers, ou 576 entiers divisibles par 11.

En plaçant les sept chiffres au hasard, le nombre d'entiers que l'on peut former est égal à $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou 5040.
La probabilité pour que l'entier ainsi formé soit divisible par 11 est donc égale à $\frac{576}{5040}$, ou $\frac{4}{35}$.

Réponse : (E)