Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 11 mai 2020
Concours - Jour 2

La ressource d'aujourd'hui présente deux questions des concours de mathématiques 2020 du CEMI.

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème par équipe nº7

Quel est le plus petit nombre entier positif à quatre chiffres qui est divisible par 5 et 9 et qui n'a que des chiffres pairs ?

Concours Euclide 2020, nº4(b)

On considère une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 10.
On considère une suite arithmétique de raison d et de premier terme 10.
Le rapport du 6$^{\text{e}}$ terme de la suite géométrique au 4$^{\text{e}}$ terme de la suite géométrique est égal au rapport du 6$^{\text{e}}$ terme de la suite arithmétique au 4$^{\text{e}}$ terme de la suite arithmétique.
Déterminer toutes les valeurs possibles de d.

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée *raison*. Par exemple, $3, 6$ et 12 est une suite géométrique de trois termes.)

Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison jeudi, le 21 mai, pour les solutions aux problèmes de Concours Jour 2.

Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 11 mai 2020
Concours jour 2 - solutions

Voici les solutions aux deux problèmes de concours. La solution au premier problème est accompagnée d'une vidéo.

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème d'équipe nº7

Quel est le plus petit nombre entier positif à quatre chiffres qui est divisible par 5 et 9 et qui n'a que des chiffres pairs ?

Solution 1 : Supposons que le nombre soit $abcd$ où a, b, c, et d sont des chiffres.
Puisque le nombre est divisible par 5, on doit avoir $d = 0$ ou $d = 5$.
Les chiffres sont pairs, ce qui signifie que $d \neq 5$, donc $d = 0$.

La plus petite valeur possible de a est 2, puisqu'il doit être pair est supérieur à 0 (un nombre à quatre chiffres ne peux pas avoir $a = 0$). Nous allons donc essayer de trouver un tel nombre avec $a = 2$.
Pour être divisible par 9, on doit avoir $a + b + c + d$ divisible par 9. En substituant $a = 2$ et $d = 0$, cela signifie que $2 + b + c + 0 = 2 + b + c$ est divisible par 9.

Comme b et c sont pairs, $2 + b + c$ est pair, ce qui signifie qu'il ne peut pas être égal à 9. Ainsi, nous allons essayer de trouver b et c de sorte que $2 + b + c = 18$, qui est le plus petit multiple possible de 9 et supérieur à 9.
Cette équation, ré-arrangée, donne $b + c = 16$. Comme b et c sont pairs et satisfont $0 \leq b \leq 9$ et $0 \leq c \leq 9$, la seule valeur possible est $b = c = 8$.

Solution 2 : Un nombre entier est divisible par 5 et par 9 quand il est divisible par 45.
Comme nous cherchons un nombre n'ayant que des chiffres pairs, son dernier chiffre est soit $0, 2, 4, 6$, ou 8, donc le nombre lui-même est pair.
Ainsi, nous cherchons un multiple, pair, de 45.

Un nombre pair est un multiple de 45 quand il est multiple de 90.
Cela signifie que nous cherchons le plus petit nombre à 4 chiffres multiple de 90 qui n'a que des chiffres pairs.
Le plus petit nombre à 4 chiffres multiple de 90 est 1080, mais son première chiffre est un 1, qui est un chiffre impair.
Chacun des 10 multiples de 90 suivants a un premier chiffre égal à 1, donc le nombre que nous cherchons doit être supérieur à 2000.

Les nombres à quatre chiffres multiples de 90, qui ont un chiffre des milliers égal à 2 sont :

$$2070, 2160, 2250, 2340, 2430, 2520, 2610, 2700, 2790, 2880, 2970$$

et le seul nombre de cette liste qui n'a que des chiffres pairs est 2880.
Par conséquent, 2880 est le plus petit nombre à 4 chiffres qui soit multiple de 5, multiple de 9, et n'a que des chiffres pairs.

Vidéo
Clique ce lien pour une discussion sur deux approches différentes pour résoudre ce premier problème : https://youtu.be/hnksZR1etAg.

Concours Euclide 2020, nº4(b)

On considère une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 10.
On considère une suite arithmétique de raison d et de premier terme 10.
Le rapport du 6^e terme de la suite géométrique au 4^e terme de la suite géométrique est égal au rapport du 6^e terme de la suite arithmétique au 4^e terme de la suite arithmétique.
Déterminer toutes les valeurs possibles de d.

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une constante appelée *raison*. Par exemple, $3, 5, 7$ et 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée *raison*. Par exemple, $3, 6$ et 12 est une suite géométrique de trois termes.)

Solution :

Les 6 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 10 sont : $10,\ 5,\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{5}{16}$.
Dans ce cas, le rapport du 6^e terme de la suite géométrique au 4^e terme est $\dfrac{5/16}{5/4}$, soit $\dfrac{1}{4}$. (Par ailleurs, on aurait pu déterminer ce rapport sans écrire la suite en prenant conscience qu'on doit multiplier par $\dfrac{1}{2}$ deux fois en passant du 4^e terme au 6^e terme.)
Les 6 premiers termes d'une suite arithmétique de raison d et de premier terme 10 sont : $10,\ 10+d,\ 10+2d,\ 10+3d,\ 10+4d,\ 10+5d$.
Dans ce cas, le rapport du 6^e terme de la suite arithmétique au 4^e terme est $\dfrac{10+5d}{10+3d}$.
Puisque ces rapports sont égaux, alors $\dfrac{10+5d}{10+3d} = \dfrac{1}{4}$. On a donc $4(10+5d) = 10+3d$, d'où $40+20d = 10+3d$ ou $17d = -30$, soit $d = -\dfrac{30}{17}$.