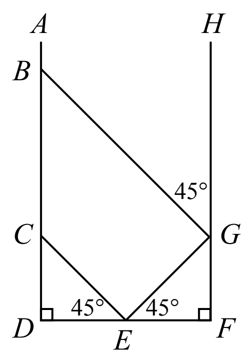
Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le jeudi 21 mai 2020
Concours - jour 3

La ressource d'aujourd'hui présente deux questions des concours mathématiques 2020 du CEMI.

Concours Euclide 2020, nº 3(a)

Claudette tient un pointeur laser au point C et pointe le faisceau laser vers le point E. Le faisceau heurte DF au point E et se réfléchit vers FH qu'il heurte au point G avant de se réfléchir vers AD qu'il heurte au point B, comme dans la figure ci-contre. Si $DE = EF = 1$ m, quelle est la longueur de BD en mètres ?



Concours Euclide 2020, nº 5(b)

Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned}(x-1)(y-2) &= 0\\(x-3)(z+2) &= 0\\x+yz &= 9\end{aligned}$$

Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison lundi, le 25 mai, pour les solutions aux problèmes de Concours Jour 3.

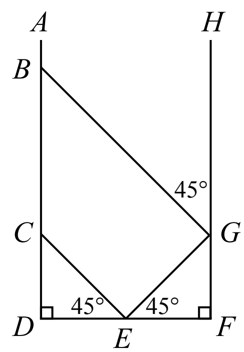
Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le jeudi 21 mai 2020
Concours jour 3 - solutions

Voici les solutions aux deux problèmes de concours.

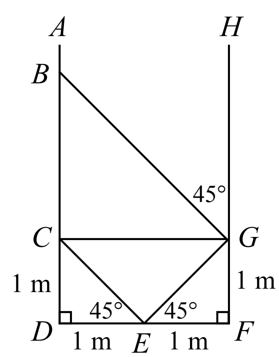
Concours Euclide 2020, n° 3(a)

Claudette tient un pointeur laser au point C et pointe le faisceau laser vers le point E. Le faisceau heurte DF au point E et se réfléchit vers FH qu'il heurte au point G avant de se réfléchir vers AD qu'il heurte au point B, comme dans la figure ci-contre. Si $DE = EF = 1$ m, quelle est la longueur de BD en mètres ?



Solution :

Remarquons d'abord qu'un triangle dont deux angles mesurent 45° et 90° est un triangle isocèle car le troisième angle a une mesure égale à $180° - 90° - 45° = 45°$. Le triangle a donc deux angles isométriques.
De façon particulière, le triangle CDE est isocèle et $CD = DE$ et le triangle EFG est isocèle et $EF = FG$.
Puisque $DE = EF = 1$ m, alors $CD = FG = 1$ m.
On relie C et G.



Considérons le quadrilatère $CDFG$. Puisque les angles aux sommets D et F sont droits et que $CD = GF$, $CDFG$ doit donc être un rectangle.
Cela signifie que $CG = DF = 2$ m et que les angles aux sommets C et G sont droits.
Puisque $\angle CGF = 90°$ et $\angle DCG = 90°$, alors $\angle BGC = 180° - 90° - 45° = 45°$ et $\angle BCG = 90°$.
Le triangle BCG est donc isocèle et $BC = CG = 2$ m.
Finalement, $BD = BC + CD = 2 \text{ m} + 1 \text{ m} = 3$ m.

La solution du second problème est en page suivante.

Concours Euclide 2020, n$^{\text{o}}$ 5(b)

Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned}(x-1)(y-2) &= 0\\(x-3)(z+2) &= 0\\x+yz &= 9\end{aligned}$$

Solution :

Puisque $(x-1)(y-2)=0$, alors $x=1$ ou $y=2$.
Supposons que $x=1$. Dans ce cas, les équations restantes sont :

$$\begin{aligned}(1-3)(z+2) &= 0\\1+yz &= 9\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}-2(z+2) &= 0\\yz &= 8\end{aligned}$$

D'après la première équation, $z=-2$.
D'après la seconde équation, $y(-2)=8$, d'où $y=-4$.
Donc, si $x=1$, la seule solution est $(x,y,z)=(1,-4,-2)$.
Supposons que $y=2$. Dans ce cas, les équations restantes sont :

$$\begin{aligned}(x-3)(z+2) &= 0\\x+2z &= 9\end{aligned}$$

D'après la première équation, $x=3$ ou $z=-2$.
Si $x=3$, alors $3+2z=9$, d'où $z=3$.
Si $z=-2$, alors $x+2(-2)=9$, d'où $x=13$.
Donc, si $y=2$, les solutions sont $(x,y,z)=(3,2,3)$ et $(x,y,z)=(13,2,-2)$.
Pour résumer, les solutions qui vérifient le système d'équations sont :

$$(x,y,z)=(1,-4,-2),\ (3,2,3),\ (13,2,-2)$$

On peut confirmer par substitution que chacun des triplets vérifie bel et bien chacune des équations.