Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 25 mai 2020
Concours - jour 4

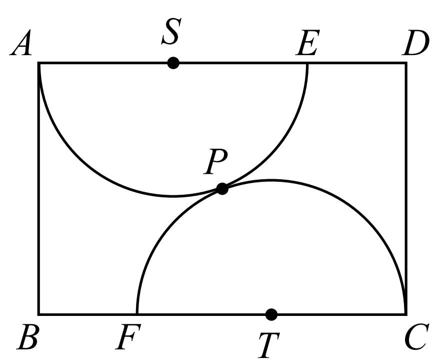
La ressource d'aujourd'hui présente deux questions des concours mathématiques 2020 du CEMI.

Concours Euclide 2020, nº 2(c)

Soit n un entier strictement positif et soit la valeur de $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ un entier. Déterminer toutes les valeurs possibles de n.

Concours Euclide 2020, nº 6(a)

Dans la figure ci-contre, le rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 4$ et $BC = 6$. Le demi-cercle de diamètre AE a pour centre S et le demi-cercle de diamètre FC a pour centre T. Les deux demi-cercles, de centres S et T, ont chacun un rayon de r et se touchent en un seul point, P. Quelle est la valeur de r ?



Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison lundi, le 1er juin, pour les solutions aux problèmes de Concours - Jour 4.

Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 25 mai 2020
Concours jour 4 - solutions

Voici les solutions aux deux problèmes de concours. La solution au premier problème est accompagnée d'une vidéo.

Concours Euclide 2020, n° 2(c)

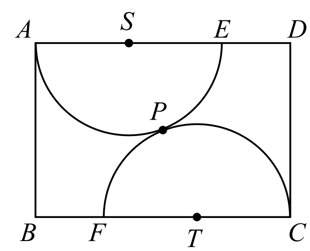
Soit n un entier strictement positif et soit la valeur de $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ un entier. Déterminer toutes les valeurs possibles de n.

Solution :
On voit d'abord que $\dfrac{n^2+n+15}{n} = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{n}{n} + \dfrac{15}{n} = n + 1 + \dfrac{15}{n}$.
Donc, $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ est un entier uniquement lorsque $n + 1 + \dfrac{15}{n}$ est un entier.
Puisque $n + 1$ est un entier, alors $\dfrac{n^2+n+15}{n}$ est un entier uniquement lorsque $\dfrac{15}{n}$ est un entier.
L'expression $\dfrac{15}{n}$ est un entier uniquement lorsque n est un diviseur de 15.
Puisque n est un entier strictement positif, alors les valeurs possibles de n sont 1, 3, 5 et 15.

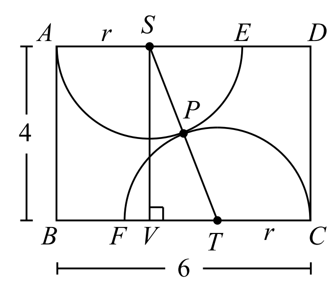
> **Vidéo** Clique le lien suivant pour une discussion à propos de la solution du premier problème de concours : https://youtu.be/MDV_HBu3-v4.

Concours Euclide 2020, n° 6(a)

Dans la figure ci-contre, le rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 4$ et $BC = 6$. Le demi-cercle de diamètre AE a pour centre S et le demi-cercle de diamètre FC a pour centre T. Les deux demi-cercles, de centres S et T, ont chacun un rayon de r et se touchent en un seul point, P. Quelle est la valeur de r ?



Solution :
On abaisse une perpendiculaire de S jusqu'à V sur BC. Puisque le quadrilatère $ASVB$ a trois angles droits, son quatrième angle doit également être droit. Le quadrilatère est donc un rectangle. Donc, $BV = AS = r$ puisque AS est un rayon du demi-cercle supérieur. De plus, $SV = AB = 4$.
On joint les points S et T au point P. Puisque les deux demi-cercles sont tangents en P, alors SPT est une droite, d'où on a donc
$ST = SP + PT = r + r = 2r$. Considérons le triangle rectangle SVT. On a $SV = 4$ et $ST = 2r$. De plus, $VT = BC - BV - TC = 6 - r - r = 6 - 2r$. D'après le théorème de Pythagore,



$$\begin{aligned} SV^2 + VT^2 &= ST^2 \\ 4^2 + (6-2r)^2 &= (2r)^2 \\ 16 + 36 - 24r + 4r^2 &= 4r^2 \\ 52 &= 24r \end{aligned}$$

Donc, $r = \frac{52}{24} = \frac{13}{6}$.