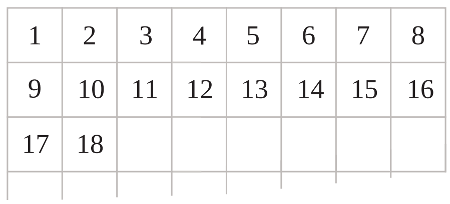
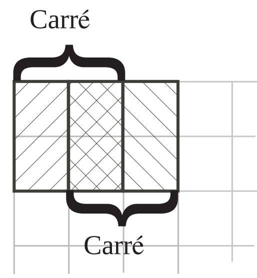
Problème

Bart et Lisa sont fatigués de jouer aux dames, car Lisa gagne toujours. Ils se souviennent qu'un jour, dans leur classe de mathématiques, ils ont compté le nombres de carrés de toutes grandeurs qu'on peut trouver sur un damier. Ils ont compté 64 petits carrés 1×1 et 49 carrés 2×2. Cela inclut des carrés qui chevauchent partiellement. Ils ont continué à compter jusqu'à ce qu'ils obtiennent un total de 204 carrés.

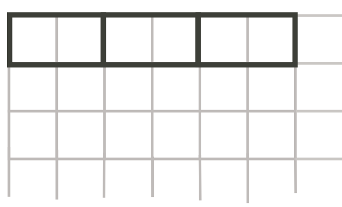


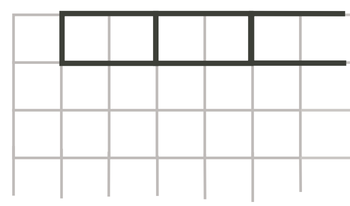
Carrés 1 x 1



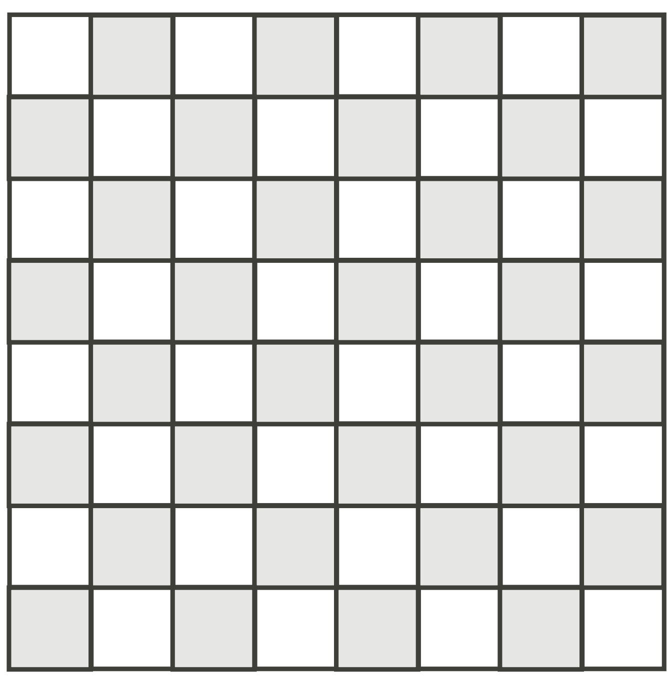
Carrés 2 x 2

Ils décident donc de compter le nombre de rectangles 1×2, comme ceux ci-dessous. Ils s'assurent de bien compter les rectangles qui chevauchent partiellement. S'ils ont compté correctement, quel est leur total?





Voici un damier pour t'aider.



Prolongement

Trace des figures pour illustrer comment Bart et Lisa ont compté le nombre total de carrés sur le damier 8×8. Leur total est-il correct?

Indices

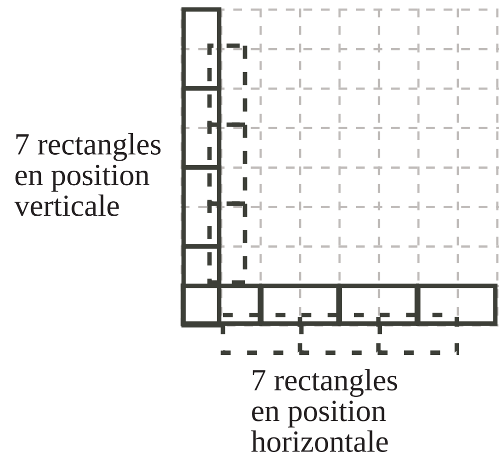
1er indice - Trace un damier 3×3. Combien y a-t-il de rectangles 1×2 sur ce damier? Comment les as-tu comptés? Recommence avec un damier 4×4 .

2^{e} indice - Un rectangle 1×2 est-il identique à un rectangle 2×1 (c'est-à-dire peut-on placer le rectangle verticalement)?

Suggestion: Si la classe n'a jamais vu le problème de compter le nombre de carrés de toutes grandeurs sur un damier, encourager les élèves à faire le prolongement. Les encourager à chercher une régularité.

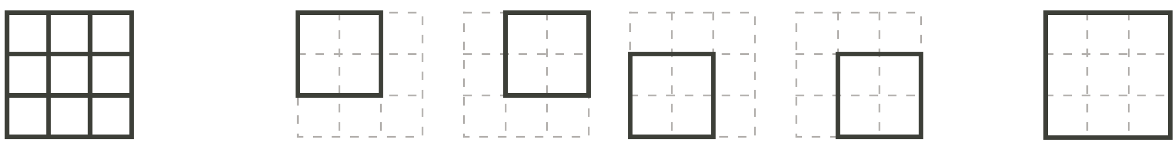
Solution

Dans chaque colonne, il y a 7 rectangles 1×2 en position verticale. Dans la figure ci-contre, on en voit 4 dans la première colonne et 3 autres en pointillé qui ont été placés en retrait et qui chevauchent les 4 rectangles précédents. (On devrait les pousser vers la gauche pour les placer dans leur vraie position.) Puisqu'il y a 8 colonnes, il y a 56 rectangles 1×2 en position verticale.
De même, dans chaque rangée, il y a 7 rectangles 2×1. Dans la figure, on voit 4 rectangles dans la rangée du bas et 3 autres en pointillé qui ont été placés un peu plus bas et qui chevauchent les 4 rectangles précédents. (On devrait les pousser vers le haut pour les placer dans leur vraie position.) Puisqu'il y a 8 rangées, il y a 56 rectangles 2×1 en position horizontale. Il y a donc 112 rectangles en tout.



Prolongement
On considère des cas plus simples et on cherche une régularité.

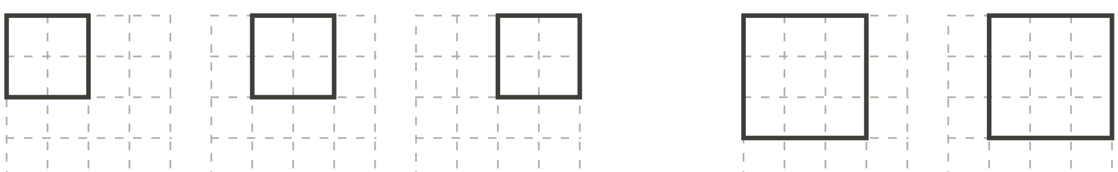
a) On cherche le nombre total de carrés sur un damier 3×3:



9 carrés 1x1 | 4 carrés 2x2 | 1 carré 3x3

Donc sur un damier 3×3, le nombre de carrés est égal à $1 + 4 + 9$, c'est-à-dire 14.

On cherche le nombre de carrés sur un damier 4×4:
On sait qu'il y a 16 carrés 1×1.



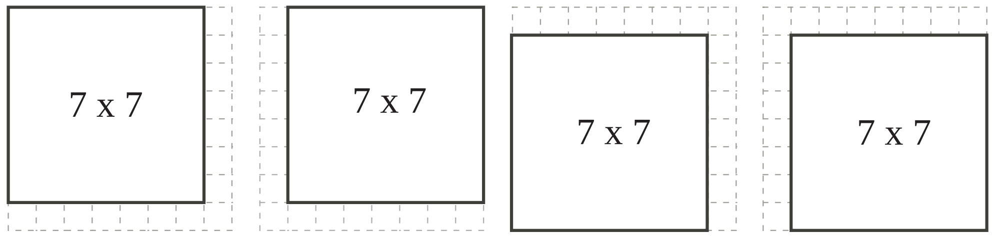
On voit 3 carrés 2x2. On peut en placer 3 autres en descendant ceux-ci de 1 unité vers le bas et on peut en placer 3 autres en les descendant de 2 unités vers le bas. Il y a donc 9 carrés 2x2 en tout.

On voit 2 carrés 3x3. On peut en placer 2 autres en descendant ceux-ci de 1 unité vers le bas. Il y a donc 4 carrés 3x3 en tout.

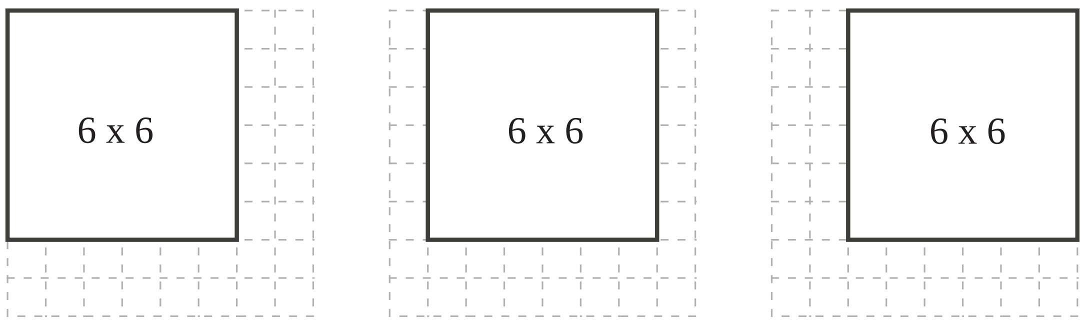
On sait qu'il y a 1 carré 4×4. Donc sur un damier 4×4, le nombre de carrés est égal à $1 + 4 + 9 + 16$, c'est-à-dire 30.

b) D'après la régularité des réponses de la partie a), le nombre de carrés sur un damier 8×8 semble être égal à $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$, c'est-à-dire 204. En voici quelques-uns:

Voici les 7×7:



Il y a 9 carrés 6×6. En voici trois. Chacun peut être déplacé de 1 ou de 2 unités vers le bas.



La régularité nous dit que sur un damier $n \times n$, le nombre total de carrés est égal à la somme des carrés des entiers de 1 à n.

Donc, sur un damier 8×8, le nombre total de carrés est égal à
$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$, c'est-à-dire 204.
Donc, le nombre obtenu par Bart et Lisa est correct.