Partie 2 — À l'intention de l'enseignante ou de l'enseignant

Domaines

Problème 1 - Numération et sens du nombre

Problème 2 - Mesure

Problème 3 - Numération et sens du nombre ; Géométrie et sens de l'espace

Problème 4 - Géométrie et sens de l'espace

Problème 5 - Probabilité

Problème 6 - Géométrie et sens de l'espace ; Mesure

Indices et suggestions

Problème 1

Suggestion : Pour permettre une approche par tâtonnements, demander aux élèves de créer des cartons numérotés 1, 2, . . . , 9 et de les placer en ensembles de trois avec des sommes identiques.

1er indice - Comment peux-tu trouver ce qu'est la somme des trois nombres dans chaque ensemble ?

2e indice - Quels nombres NE peuvent PAS être dans un même ensemble ? (Par exemple, le 7 et le 8 peuvent-ils être ensemble ? Le 1 et le 2 peuvent-ils être ensemble ?)

Remarque à l'enseignante ou à l'enseignant : Si le 1er indice ne suffit pas, demander « Quelle est la somme des neuf nombres ? », puis « Comment cette somme nous aide-t-elle à trouver la somme de chaque ensemble ? »

Suggestion : Une fois que les élèves ont découvert que la somme des nombres de chaque ensemble est égale à 15, on peut leur suggérer de trouver toutes les combinaisons possibles de trois nombres qui ont une somme de 15. Ensuite, ils doivent trouver trois ensembles qui n'ont aucun nombre en commun.

Problème 2

1er indice - Trace une figure avec soin, tout en indiquant le jardin, la clôture et leurs dimensions.

Suggestion : Fournir du papier quadrillé pour encourager des figures précises.

Problème 3

1er indice - Peux-tu former un triangle dont les côtés mesurent 2, 3 et 6 ? Pourquoi ?

Suggestion : Fournir une trentaine de cure-dents à chaque élève. En supposant qu'un cure-dents correspond à une unité de longueur, leur suggérer de tenter de former les triangles.

Problème 4

1er indice - Quelles faces des cubes NE sont PAS peintes en noir ?

2e indice - Combien de faces y a-t-il en tout, si on a 8 cubes ?

Suggestion : Fournir des cubes emboîtables (ou d'autres cubes) et leur demander de placer un morceau de ruban-cache sur chaque face qui serait peinte en noir.

Prolongement

1^er^ indice - Combien de cubes y a-t-il ? Combien de faces y a-t-il en tout ?

2^e^ indice - Quelles faces ne sont pas peintes ? Combien y en a-t-il ?

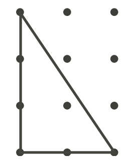
Problème 5 c)

1^er^ indice - Combien y a-t-il de résultats possibles en tout ?

2^e^ indice - Quelles sont les façons d'obtenir les résultats de l'évènement ?

Problème 6 a)

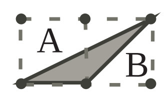
Remarque à l'enseignante ou à l'enseignant : Il est impossible d'utiliser une base de plus d'une unité et une hauteur supérieure à 1 sans inclure un point dans le triangle, sauf pour le cas où la base et la hauteur sont de longueur 2.



1^er^ indice - Qu'arrive-t-il si tu fais un triangle rectangle avec une base de 2 et une hauteur de 3 unités ou plus ?

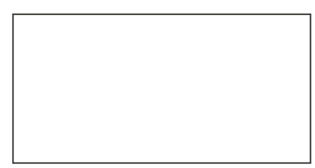
Problème 6 b)

1^er^ indice - Quelle est l'aire à l'intérieur du rectangle tracé en tirets, mais à l'extérieur du triangle ombré ?



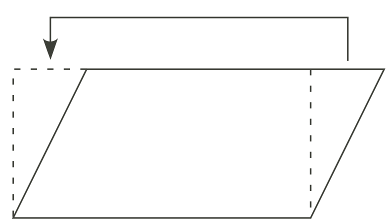
Suggestion : On peut présenter l'aire à l'extérieur du triangle comme étant « la moitié d'un rectangle 2×1 (c.-à-d. l'aire de A) plus la moitié d'un carré 1×1 (c.-à-d. l'aire de B) ». L'aire du triangle est donc égale à $2 - 1 - \frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{2}$. On peut aussi constater que le triangle a une base de 1 et une hauteur de 1 et que son aire est donc égale à $\frac{1}{2}$. La formule pour l'aire d'un triangle, soit $\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur, ne devrait pas être apprise par coeur. Il faut plutôt savoir qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme et qu'un parallélogramme a la même aire qu'un rectangle de même base et même hauteur. On peut le démontrer comme suit :

1. Tracer un rectangle. La longueur de la base nous dit combien on peut aligner de petits carrés-unités le long de la base. La hauteur nous dit combien on peut placer de rangées de ces petits carrés-unités. Donc, le produit nous donne le nombre total de petits carrés-unités à l'intérieur du rectangle.



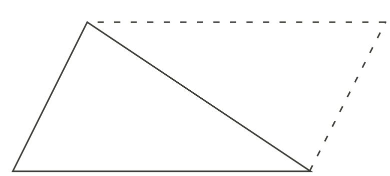
Aire = base × hauteur

2. Tracer un parallélogramme oblique ayant la même base et la même hauteur que le rectangle. Montrer qu'on peut découper un petit triangle qui dépasse et le coller de manière à former le même rectangle. Puisque le parallélogramme et le rectangle enferment la même quantité de papier, ils ont la même aire. Donc, l'aire du parallélogramme est égale à « base $\times$ hauteur ».



Aire = base × hauteur

3. Utiliser une ligne à tirets pour tracer un parallélogramme identique au précédent. Tracer une diagonale et compléter le triangle, comme dans la figure ci-contre. On voit que la diagonale a coupé le parallélogramme en deux triangles identiques. Donc, chaque triangle a une aire égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur.



Aire = $\frac{1}{2}$ base × hauteur

Solutions

Problème 1

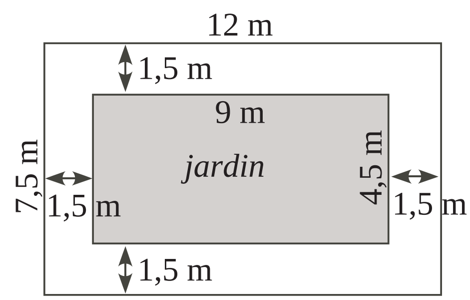
La somme des nombres 1, 2, ..., 9 est égale à 45. Puisque les nombres de chaque ensemble doivent avoir la même somme, cette somme doit donc être égale à 15. Donc, les nombres 7, 8 et 9 doivent paraître dans des ensembles distincts. Voici les combinaisons possibles de trois nombres distincts de 1 à 9 qui ont une somme de 15 : $9+1+5$, $9+2+4$, $8+1+6$, $8+2+5$, $8+3+4$, $7+2+6$, $7+3+5$. Si on choisit dans cette liste, il n'y a que deux façons de choisir trois ensembles qui contiennent les neuf nombres : (i) $\{9, 1, 5\}$, $\{8, 3, 4\}$, $\{7, 2, 6\}$ ou (ii) $\{9, 2, 4\}$, $\{8, 1, 6\}$, $\{7, 3, 5\}$.

Prolongement

1. Voici deux solutions. Il y en a d'autres.
   (i) $\{9, 1, 2, 3\}$, $\{7, 8\}$, $\{6, 5, 4\}$ ou (ii) $\{8, 1, 2, 4\}$, $\{9, 6\}$, $\{7, 3, 5\}$
2. Les réponses vont varier, selon les ensembles choisis au départ. Demander aux élèves de faire vérifier leurs résultats par d'autres élèves.

Problème 2

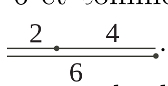
a) Il y a une différence de 3 m entre les dimensions correspondantes du jardin et de la clôture. Comme on le voit dans la figure ci-contre, si le jardin est centré, cette différence est partagée également pour donner une distance de 1,5 m entre la clôture et le jardin.

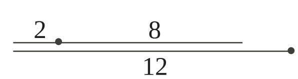


b) Le nouveau jardin aura une aire de $7{,}5 \times 12$ mètres carrés, soit 90 mètres carrés, tandis que le jardin actuel a une aire de $4{,}5 \times 9$ mètres carrés, soit 40,5 mètres carrés. Le jardin va donc augmenter de 49,5 mètres carrés. Son aire va donc plus que doubler.

Problème 3

a) Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24. Les cinq choix de diviseurs différents qui peuvent servir de longueurs de côtés de triangles sont $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 6, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$ et $\{6, 8, 12\}$.

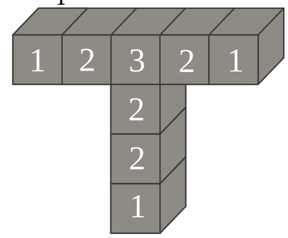
b) Il faut toujours que la somme des longueurs de n'importe quels deux côtés soit plus grande que la longueur du troisième côté.
Par exemple, on ne peut pas former un triangle avec des côtés de longueurs $\{2, 4, 6\}$, puisque $2 + 4 = 6$ et comme on le voit, les deux petits côtés ne sont pas assez longs pour former un triangle .

De même, avec les longueurs $\{2, 8, 12\}$, on a $2 + 8 = 10 < 12$  et on voit que les deux petits côtés ne sont pas assez longs pour former un triangle.

Il s'agit d'un théorème célèbre appelé *Inégalité du triangle* : Dans un triangle, il faut toujours que la somme des longueurs de n'importe quels deux côtés soit plus grande que la longueur du troisième côté.

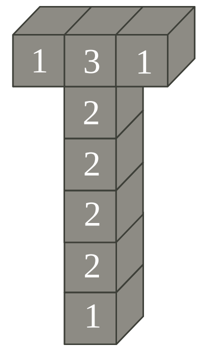
Problème 4

La plupart des élèves vont compter les faces peintes une à la fois d'une façon ou d'une autre (p. ex., en procédant un cube à la fois, ou en comptant les faces du devant, puis celles d'un côté, etc.). Voici une autre façon de compter en organisant les cubes selon le nombre de faces peintes.



a) On peut distinguer trois sortes de cubes selon le nombre de faces peintes :
Type 1 : Une face non peinte ; donc 5 faces noires.
Type 2 : Deux faces non peintes ; donc 4 faces noires
Type 3 : Trois faces non peintes ; donc 3 faces noires

D'après le T illustré ci-contre, il y a 3 cubes de type 1, 4 cubes de type 2 et 1 cube de type 3. Le nombre de faces peintes est donc égal à $(3 \times 5) + (4 \times 4) + (1 \times 3)$, ou 34.

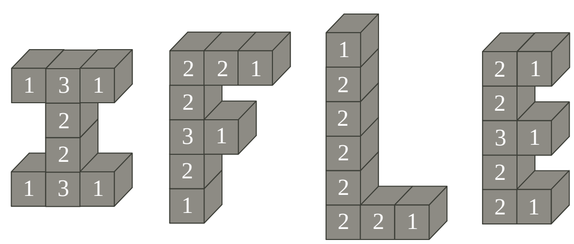


b) Si on forme le T illustré ci-contre, il y a encore 3 cubes de type 1, 4 cubes de type 2 et 1 cube de type 3. Le nombre de faces peintes n'a pas changé.

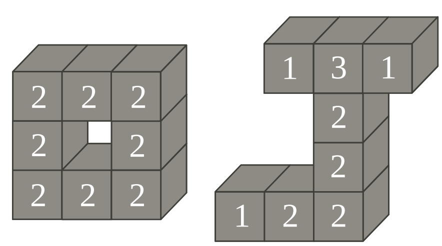
c) Si on défaisait le T, on verrait trois types de cubes :
Type 1 : Toutes les faces sont noires, sauf une qui était collée contre un autre cube.
Type 2 : Quatre faces sont noires. Elles forment un ruban à la verticale autour du cube. Une face à gauche et une face à droite ne sont pas peintes.
Quatre faces sont noires. Elles forment un ruban à l'horizontale autour du cube. Une face en haut et une face en bas ne sont pas peintes.
Type 3 : Le devant, le haut et l'arrière du cube sont noirs.

Prolongement

1. On étiquette les cubes selon leur type, comme dans la partie a) et on obtient les nombres suivants de faces peintes :
   I : $(4 \times 5) + (2 \times 4) + (2 \times 3) = 34$;
   F : $(3 \times 5) + (4 \times 4) + (1 \times 3) = 34$;
   L : $(2 \times 5) + (6 \times 4) = 34$;
   E : $(3 \times 5) + (4 \times 4) + (1 \times 3) = 34$.
   Ces lettres ont toutes le même nombre de faces peintes que le T.



2. On obtient les nombres suivants de faces peintes :
   O : $(8 \times 4) = 32$;
   J : $(3 \times 5) + (4 \times 4) + (1 \times 3) = 34$.
   Seule la lettre O donne un nombre différent. Il s'agit de la seule construction qui n'a aucune extrémité. Elle forme un anneau.



Problème 5

a) Si on fait pivoter la première flèche seulement, on a une chance égale d'obtenir n'importe quel nombre. Donc, la probabilité d'obtenir un 4 est égale à $\frac{1}{4}$. La probabilité d'obtenir un 2 est aussi égale à $\frac{1}{4}$.

b) Si on fait pivoter la deuxième flèche seulement, la probabilité de perdre son tour est égale à $\frac{1}{4}$, puisque « Perds ton tour » occupe un quart du disque.

c) Si on remplit l'arbre des résultats, on voit que :

(i) il y a deux résultats qui donnent 2 vers la gauche et 16 résultats en tout. La probabilité est donc égale à $\frac{2}{16}$ ou $\frac{1}{8}$;

(ii) il y a un seul résultat qui donne 1 vers la droite. La probabilité est donc égale à $\frac{1}{16}$.

Prolongement

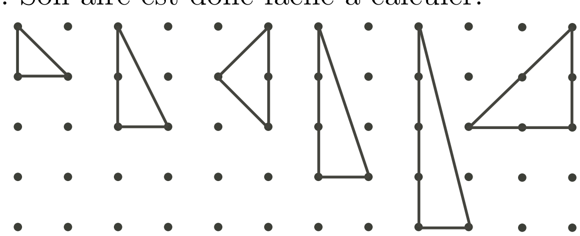
1. Si on examine l'arbre des résultats, on remarque qu'il y a 16 résultats équiprobables qui ont une probabilité de $\frac{1}{16}$. Il n'y a donc aucun résultat qui a une probabilité de $\frac{1}{12}$.

2. On enlèverait une des sections « Gauche » et ses branches, puisque « Gauche » , « Droite » et « Perds ton tour » auraient la même probabilité. Il y arait donc 12 résultats possibles et chacun aurait une probabilité de $\frac{1}{12}$.

Problème 6

FIGURE-TOI DONC!

a) (i) Chaque triangle rectangle occupe la moitié d'un rectangle ou d'un carré. Son aire est donc facile à calculer.

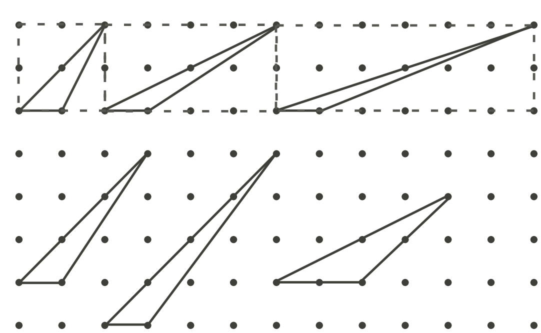


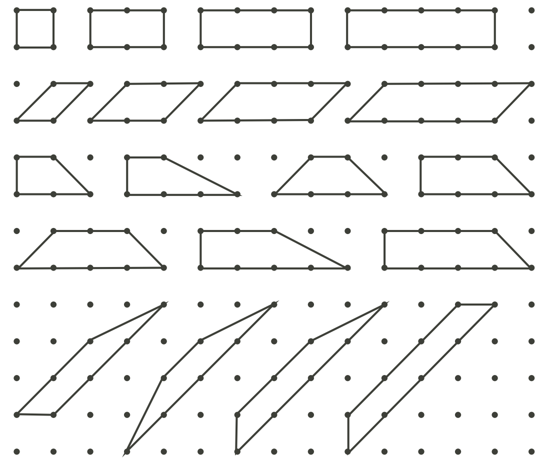
N^{bre} de points	Aire (un. carrées)
3	$\frac{1}{2}$
4	1
5	$1\frac{1}{2}$
6	2

(iii) À chaque fois que le nombre de points augmente de 1, l'aire augmente de $\frac{1}{2}$ unité carrée.

(iv) Si un triangle rectangle avait 20 points, son aire serait égale à $1 + \frac{1}{2}(20 - 4)$ unités carrées, soit 9 unités carrées.

b) Tous les triangles qui passent par 3 points ont une base de 1 et une hauteur de 1. Ils ont donc tous une aire de $\frac{1}{2}$. Tous les triangles qui passent par 4 points ont une base de 2 et une hauteur de 1 ou une base de 1 et une hauteur de 2 ; ils ont donc une aire de 1 unité carrée. De même, les triangles qui passent par 5 points ont une base de 1 et une hauteur de 3 ou une base de 3 et une hauteur de 1 ; ils ont donc une aire de $1\frac{1}{2}$. Les triangles qui passent par 6 points ont une base de 1 et une hauteur de 4 ou une base de 4 et une hauteur de 2 ; certains ont même une base de 2 et une hauteur de 2, comme celui à l'extrême droite ; ils ont tous une aire de 2.





c) Si des rectangles ou des parallélogrammes passent par 4, 6, 8, 10, … points, leur aire respective est égale à 1, 2, 3, 4, … unités carrées. Si des trapèzes passent par 5, 6, 7, 8, 9, … points, leur aire respective est égale à $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, … unités carrées. Donc, en général, il semble bien que si des quadrilatères passent par 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … points, leur aire respective est égale à 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, … unités carrées, tout comme pour les triangles.

Prolongement

1. Pour les 8 polygones qui ont une aire de 2 unités carrées, on peut tracer, par exemple, quelques triangles qui passent par 6 points, un rectangle, quelques parallélogrammes qui ont une base de 2 et une hauteur de 1, quelques trapèzes qui passent par 6 points, etc.

2. Remarquer que A_1 et A_2 ont chacun une aire de $\frac{1}{2}$ unité carrée ; B_1, B_2 et B_3 ont chacun une aire de 1 unité carrée ; C_1 et C_2 ont chacun une aire de $\frac{1}{4}$ unité carrée. L'aire de la partie non ombrée est égale à $(2\times\frac{1}{2})+(3\times 1)+(2\times\frac{1}{4})$ unités carrées, soit $4\frac{1}{2}$ unités carrés. La forme W ombrée a donc une aire de $6-4\frac{1}{2}$ unité carrée, soit $1\frac{1}{2}$ unité carrée.