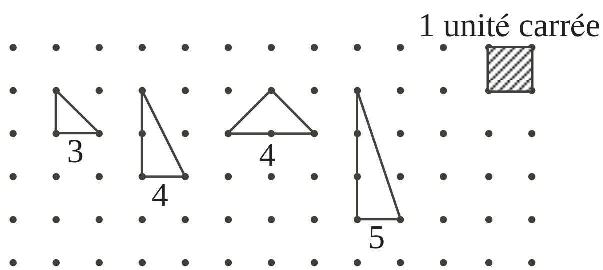
Problème

FIGURE-TOI DONC! (Activité suggérée pour des groupes de deux à quatre élèves)

Utilise un géoplan ou du papier à points (on peut reproduire celui de la page suivante). Tous les sommets doivent être SUR DES POINTS et il ne doit y avoir AUCUN POINT À L'INTÉRIEUR d'une figure. Utilise une règle pour plus de précision. Une unité carrée d'aire correspond à l'aire du plus petit carré qu'on puisse tracer avec des points pour sommets.

N^{bre} de points	Aire (un. carrées)
3	$\frac{1}{2}$
4	
5	
6	
7	

a) (i) Le petit triangle rectangle qui a 3 points sur son contour a une aire de $\frac{1}{2}$ unité carrée. Quelle est l'aire de chacun des triangles rectangles qui ont 4 points sur leur contour? qui ont 5 points sur leur contour? Inscris tes réponses dans le tableau.

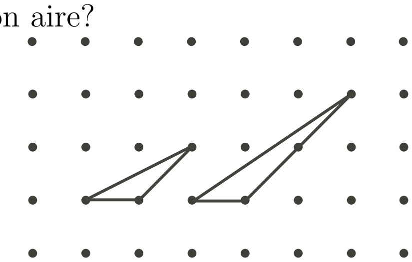


(ii) Trace un triangle rectangle qui a 6 points sur son contour et inscris son aire dans le tableau. Répète pour 7 points.

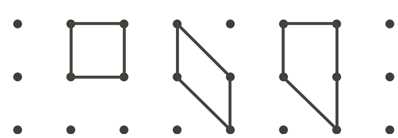
(iii) Combien d'aire est ajoutée lorsqu'on ajoute un point?

(iv) Si un triangle rectangle avait 20 points, quelle serait son aire?

b) Refais la partie a) en utilisant des triangles non rectangles, c'est-à-dire en traçant des triangles obliques qui ont 3 points, 4 points, 5 points, etc., sur leur contour.

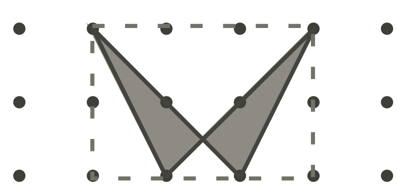


c) Refais les parties a) et b) en utilisant des quadrilatères qui ont 4 points, 5 points, 6 points, etc. sur leur contour. Commence par des rectangles, puis généralise pour des quadrilatères quelconques.



Prolongement

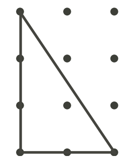
1. Trace au moins 8 polygones ayant chacun une aire de 2 unités carrées.
2. Utilise l'aire du rectangle tracé en tirets pour déterminer l'aire de la forme W ombrée.



Indices

Partie a)

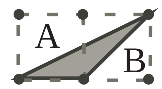
Remarque à l'enseignante ou à l'enseignant: Il est impossible d'utiliser une base de plus d'une unité et une hauteur supérieure à 1 sans inclure un point dans le triangle, sauf pour le cas où la base et la hauteur sont de longueur 2.



1er indice - Qu'arrive-t-il si tu fais un triangle rectangle avec une base de 2 et une hauteur de 3 unités ou plus?

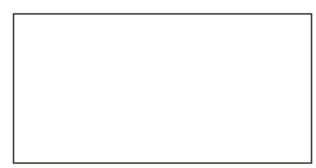
Partie b)

1er indice - Quelle est l'aire à l'intérieur du rectangle tracé en tirets, mais à l'extérieur du triangle ombré?



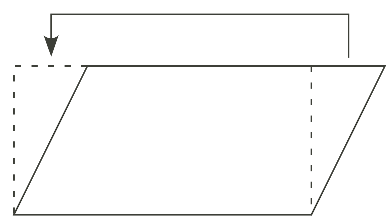
Suggestion: On peut présenter l'aire à l'extérieur du triangle comme étant « la moitié d'un rectangle 2×1 (c.-à-d. l'aire de A) plus la moitié d'un carré 1×1 (c.-à-d. l'aire de B) ». L'aire du triangle est donc égale à $2 - 1 - \frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{2}$. On peut aussi constater que le triangle a une base de 1 et une hauteur de 1 et que son aire est donc égale à $\frac{1}{2}$. La formule pour l'aire d'un triangle, soit $\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur, ne devrait pas être apprise par coeur. Il faut plutôt savoir qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme et qu'un parallélogramme a la même aire qu'un rectangle de même base et même hauteur. On peut le démontrer comme suit:

1. Tracer un rectangle. La longueur de la base nous dit combien on peut aligner de petits carrés-unités le long de la base. La hauteur nous dit combien on peut placer de rangées de ces petits carrés-unités. Donc, le produit nous donne le nombre total de petits carrés-unités à l'intérieur du rectangle.



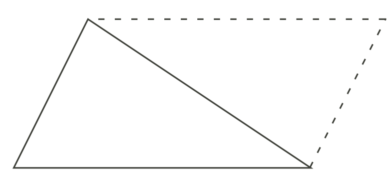
Aire = base $\times$ hauteur

2. Tracer un parallélogramme oblique ayant la même base et la même hauteur que le rectangle. Montrer qu'on peut découper un petit triangle qui dépasse et le coller de manière à former le même rectangle. Puisque le parallélogramme et le rectangle enferment la même quantité de papier, ils ont la même aire. Donc, l'aire du parallélogramme est égale à « base $\times$ hauteur ».



Aire = base $\times$ hauteur

3. Utiliser une ligne à tirets pour tracer un parallélogramme identique au précédent. Tracer une diagonale et compléter le triangle, comme dans la figure ci-contre. On voit que la diagonale a coupé le parallélogramme en deux triangles identiques. Donc, chaque triangle a une aire égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur.

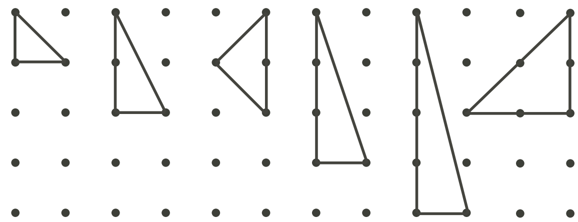


Aire = $\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur

Solution

FIGURE-TOI DONC!

a) (i) Chaque triangle rectangle occupe la moitié d'un rectangle ou d'un carré. Son aire est donc facile à calculer.

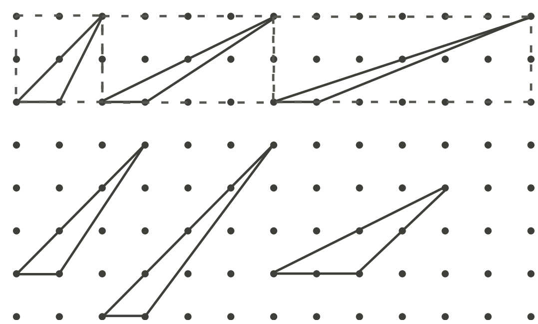


N^{bre} de points	Aire (un. carrées)
3	$\frac{1}{2}$
4	1
5	$1\frac{1}{2}$
6	2

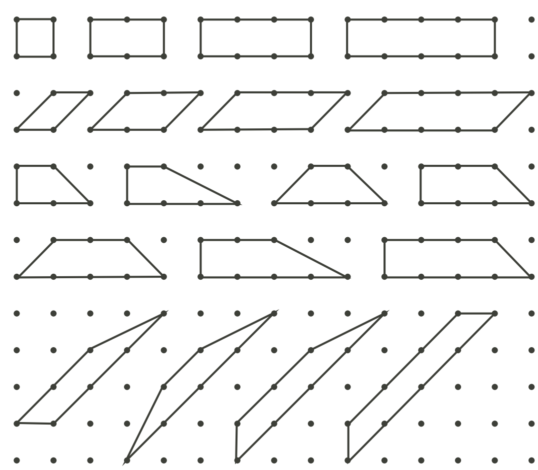
(iii) À chaque fois que le nombre de points augmente de 1, l'aire augmente de $\frac{1}{2}$ unité carrée.

(iv) Si un triangle rectangle avait 20 points, son aire serait égale à $1 + \frac{1}{2}(20 - 4)$ unités carrées, soit 9 unités carrées.

b) Tous les triangles qui passent par 3 points ont une base de 1 et une hauteur de 1. Ils ont donc tous une aire de $\frac{1}{2}$. Tous les triangles qui passent par 4 points ont une base de 2 et une hauteur de 1 ou une base de 1 et une hauteur de 2; ils ont donc une aire de 1 unité carrée. De même, les triangles qui passent par 5 points ont une base de 1 et une hauteur de 3 ou une base de 3 et une hauteur de 1; ils ont donc une aire de $1\frac{1}{2}$. Les triangles qui passent par 6 points ont une base de 1 et une hauteur de 4 ou une base de 4 et une hauteur de 2; certains ont même une base de 2 et une hauteur de 2, comme celui à l'extrême droite; ils ont tous une aire de 2.



c) Si des rectangles ou des parallélogrammes passent par 4, 6, 8, 10, ... points, leur aire respective est égale à 1, 2, 3, 4, ... unités carrées. Si des trapèzes passent par 5, 6, 7, 8, 9, ... points, leur aire respective est égale à $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, ... unités carrées. Donc, en général, il semble bien que si des quadrilatères passent par 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... points, leur aire respective est égale à 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, ... unités carrées, tout comme pour les triangles.



Prolongement

1. Pour les 8 polygones qui ont une aire de 2 unités carrées, on peut tracer, par exemple, quelques triangles qui passent par 6 points, un rectangle, quelques parallélogrammes qui ont une base de 2 et une hauteur de 1, quelques trapèzes qui passent par 6 points, etc.

2. Remarquer que A_1 et A_2 ont chacun une aire de $\frac{1}{2}$ unité carrée; B_1, B_2 et B_3 ont chacun une aire de 1 unité carrée; C_1 et C_2 ont chacun une aire de $\frac{1}{4}$ unité carrée. L'aire de la partie non ombrée est égale à $(2 \times \frac{1}{2}) + (3 \times 1) + (2 \times \frac{1}{4})$ unités carrées, soit $4\frac{1}{2}$ unités carrés. La forme W ombrée a donc une aire de $6 - 4\frac{1}{2}$ unité carrée, soit $1\frac{1}{2}$ unité carrée.