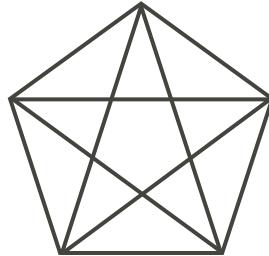
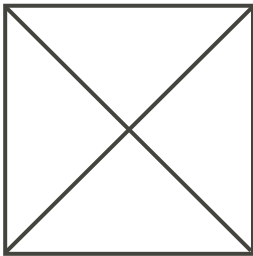


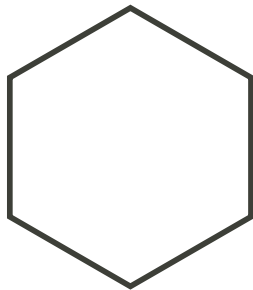
Problème

Polygones: Combien de diagonales? (Groupes de deux élèves ou plus)

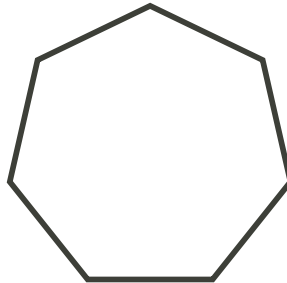
Une diagonale d'un polygone régulier est un segment de droite qui joint deux sommets non adjacents. Comme on le voit ci-dessous, un carré a deux diagonales et un pentagone en a cinq.



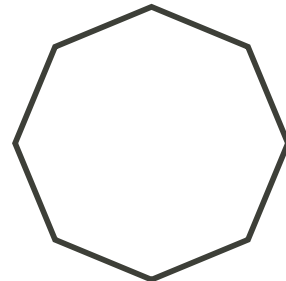
- Combien de diagonales un hexagone régulier admet-il? (Trace-les.)
- Combien de diagonales un heptagone régulier admet-il? (Trace-les.)
- Combien de diagonales un octogone régulier admet-il?



Hexagone



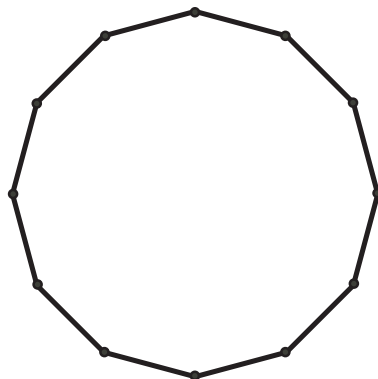
Heptagone



Octogone

- Utilise les renseignements des parties a), b) et c) pour remplir le tableau ci-contre jusqu'à la ligne pour 8 côtés. Utilise la régularité du tableau pour prédire le nombre de diagonales qu'un dodécagone (polygone à 12 côtés) régulier admet. Vérifie en traçant les diagonales dans la figure ci-dessous.

Nombre de côtés	Nombre de diagonales
3	0
4	
5	
6	
7	
8	
12	



Prolongement

- Supposons que les polygones n'étaient pas réguliers, c'est-à-dire que les côtés n'étaient pas congrus ou que les angles n'étaient pas congrus. Tes réponses seraient-elles différentes?

Indices

Suggestions: Il s'agit d'une activité de découverte guidée. On peut la présenter comme activité individuelle ou activité de groupe. Si les élèves travaillent en groupes, on peut présenter un polygone à chaque groupe. Voici d'autres suggestions:

1. Suggérer aux élèves d'utiliser une couleur particulière pour toutes les diagonales qui partent d'un même sommet et de changer de couleur pour les diagonales qui partent d'un deuxième sommet. Ceci aide à éviter qu'une même diagonale ne soit comptée plus d'une fois.
2. Lorsque les élèves ont terminé les parties a), b) et c), les faire travailler en groupe-classe pour remplir le tableau jusqu'à la ligne de 8 côtés dans la partie d).
3. Pour voir une régularité, il faut compter de façon structurée. Par exemple, tracer les diagonales d'un octogone par étapes, en utilisant un grand octogone au tableau ou un transparent.

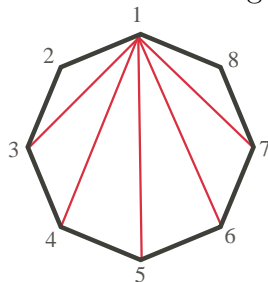
À partir du sommet 1, on peut tracer 5 diagonales (en rouge dans la figure suivante) en joignant le sommet 1 aux autres sommets non adjacents (les sommets 3, 4, 5, 6 et 7).

À partir du sommet 2, on peut tracer 5 autres diagonales (en bleu) en joignant le sommet 2 aux autres sommets non adjacents (les sommets 4, 5, 6, 7 et 8).

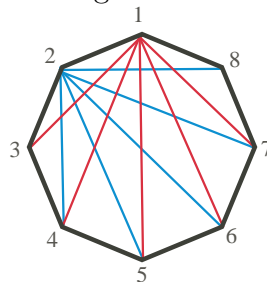
À partir du sommet 3, on peut seulement tracer 4 nouvelles diagonales (en noir).

Demander aux élèves combien on peut tracer de nouvelles diagonales à partir du sommet 4 (3—lignes à tirets rouges), puis à partir du sommet 5 (2—lignes à tirets bleus), puis à partir du sommet 6 (1—ligne à tirets noirs).

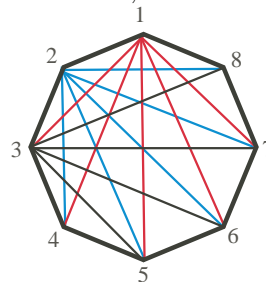
Le nombre de diagonales est égal à $5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, ou 20.



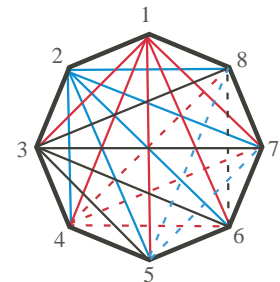
Diagonales à partir du sommet 1 (5)



Diagonales à partir des sommets 1 et 2 ($5+5$)



Diagonales distinctes à partir des sommets 1, 2 et 3 ($5+5+4$)

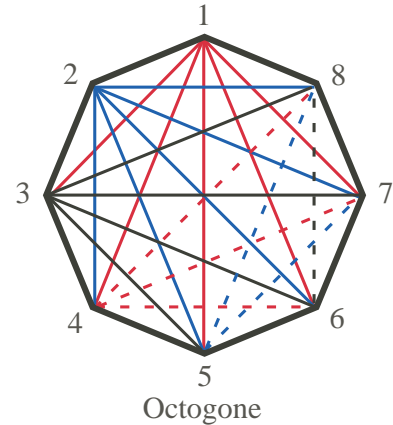
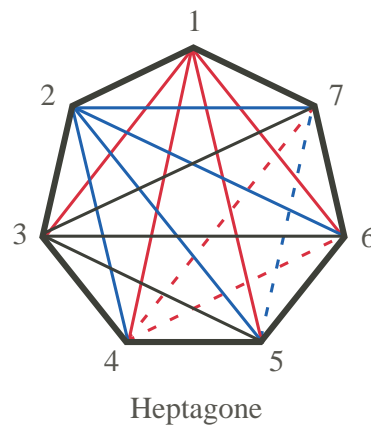
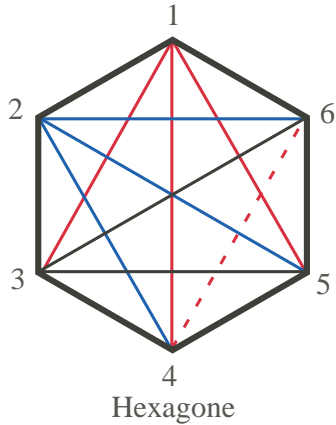


Diagonales distinctes à partir de tous les sommets ($5+5+4+3+2+1$)

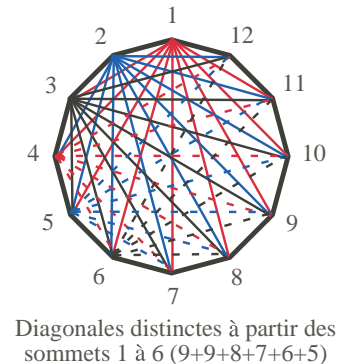
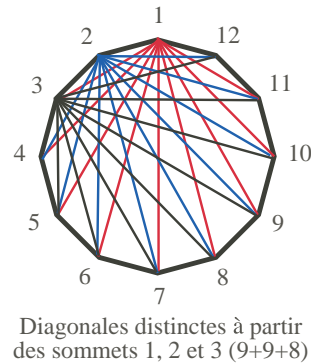
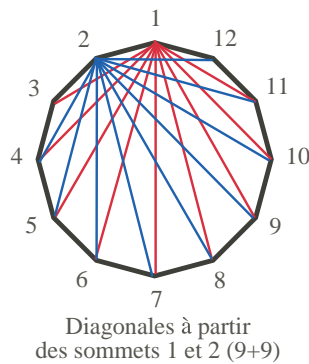
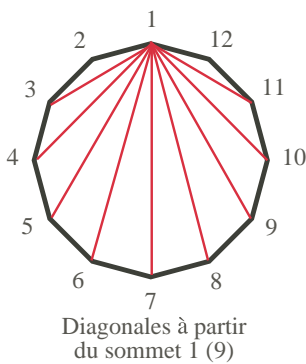
4. Pour faire réfléchir les élèves au sujet du dodécagone, leur demander « Combien de diagonales peut-on tracer à partir du 1^{er} sommet? À partir du 2^e sommet? ». Ceci devrait les mettre sur la piste à suivre, en adaptant la méthode utilisée pour l'octogone.

Solution

- a), b), c) Hexagone: Comme on le voit ci-dessous, le nombre de diagonales est égal à $3 + 3 + 2 + 1$, ou 9.
 Heptagone: Le nombre de diagonales est égal à $4 + 4 + 3 + 2 + 1$, ou 14.
 Octogone: Le nombre de diagonales est égal à $5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, ou 20.
 (Voir l'explication plus détaillée donnée dans les Indices et suggestions pour le problème 6.)



- d) En suivant la méthode utilisée pour l'octogone, il y a 9 (soit $12 - 3$) diagonales qui partent de chacun des deux premiers sommets du dodécagone (en rouge et en bleu dans les figures ci-dessous), 8 qui partent du sommet 3 (en noir), 7 qui partent du sommet 4 (lignes à traits rouges dans la dernière figure ci-dessous), 6 qui partent du sommet 5 (ligne à tirets bleus dans la dernière figure ci-dessous), 5 qui partent du sommet 6 (lignes à tirets noirs dans la dernière figure ci-dessous) et ainsi de suite, pour un total de $9 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, ou 54 diagonales.



Prolongement

- Si un polygone non régulier a le même nombre de sommets qu'un polygone régulier, les deux auront le même nombre de diagonales, puisqu'à chaque sommet correspondant, on pourra tracer le même nombre de diagonales.