

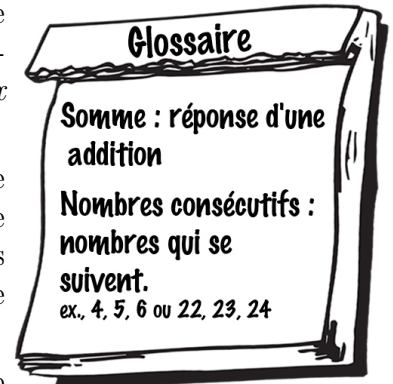
Problème

1 ^{er} nombre	2 ^e nombre	Somme
20	21	
21	22	
23	24	

1 ^{er} nombre	2 ^e nombre	3 ^e nombre	Somme
16	17	18	
23	24	25	

Le nombre 58 est la somme de nombres entiers consécutifs.

- Additionne les deux nombres de chaque rangée du tableau ci-contre. Qu'est-ce que les sommes ont en commun? Est-ce que 58 peut être la somme de *deux* entiers consécutifs? Pourquoi?
- Additionne les nombres de chaque rangée du deuxième tableau. Qu'est-ce que les sommes ont en commun? Quels trois entiers consécutifs ont une somme de 63?
- Est-ce que 58 peut être la somme de *trois* entiers consécutifs? Pourquoi?
- Quels sont des entiers consécutifs qui ont une somme de 58?



Prolongement

- Essaie de trouver un autre ensemble d'entiers consécutifs qui ont une somme de 58.

Indices

- 1^{er} indice** - a) Si tu additionnes deux nombres consécutifs, quelle sorte de nombre obtiens-tu?
- 2^e indice** - b) Quels sont les diviseurs des deux sommes du deuxième tableau?
- 3^e indice** - c) Qu'est-ce que ta réponse de la partie b) te suggère de vérifier au sujet du nombre 58?
- 4^e indice** - d) Est-ce que 58 peut être la somme de quatre entiers consécutifs ou plus d'un chiffre?
Pourquoi?
- 5^e indice** - d) Est-ce que 58 peut être la somme de trois entiers consécutifs ou plus dans la vingtaine?
Pourquoi?

Solution

- a) On a $20 + 21 = 41$, $21 + 22 = 43$ et $23 + 24 = 47$. Chaque somme est un nombre impair. La somme de deux entiers consécutifs est toujours impaire, puisqu'on l'obtient toujours en additionnant un nombre pair et un nombre impair. Puisque 58 est pair, il ne peut être la somme de deux entiers consécutifs.
- b) On a $16 + 17 + 18 = 51$ et $23 + 24 + 25 = 72$. Chaque somme est divisible par 3 et elle est égale à 3 fois le nombre du milieu ($51 = 3 \times 17$ et $72 = 3 \times 24$). C'est vrai pour n'importe quelle somme de trois entiers consécutifs. Par exemple, $20 + 21 + 22$. Avant d'additionner, on peut soustraire 1 du nombre 22 et l'ajouter au nombre 20, sans changer la somme des trois nombres:

$$\begin{array}{c} +1 \downarrow \overbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \quad \quad \downarrow -1 \\ 20 + 21 + 22 \end{array}$$

On obtient ainsi $21 + 21 + 21$, ou 3×21 .

Donc, $20 + 21 + 22 = 3 \times 21$, c'est-à-dire que $63 = 20 + 21 + 22$.

- c) Puisque 58 n'est pas divisible par 3, il ne peut être égal à la somme de trois entiers consécutifs. (On peut aussi procéder par essais systématiques et constater que:

$$16 + 17 + 18 = 51$$

$$17 + 18 + 19 = 54$$

$$18 + 19 + 20 = 57$$

$$19 + 20 + 21 = 60$$

Donc, les sommes peuvent égaier 51, 54, 57 et 60, mais pas 58.)

- d) Par tâtonnements, on obtient $58 = 13 + 14 + 15 + 16$.

Prolongement

1. On peut explorer les sommes de 5 entiers consécutifs. Par essais systématiques, on obtient:

⋮

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50$$

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55$$

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$$

⋮

Donc, la somme de cinq entiers consécutifs peut être égale à 50, 55 ou 60, mais pas à un nombre entre 55 et 60, comme 58.

La somme de cinq entiers consécutifs est toujours divisible par 5, car elle toujours égale à 5 fois le nombre du milieu. Par exemple, on considère $10 + 11 + 12 + 13 + 14$. Avant d'additionner, on peut soustraire 1 du nombre 13 et l'ajouter au nombre 11, sans changer la somme. On peut aussi soustraire 2 du nombre 14 et l'ajouter au nombre 10, sans changer la somme:

$$\begin{array}{c} +2 \downarrow \overbrace{\hspace{2.5cm}} \quad \quad \quad \downarrow -2 \\ \quad \quad +1 \downarrow \overbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \quad \quad \downarrow -1 \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 \end{array}$$

On obtient ainsi $12 + 12 + 12 + 12 + 12$, ou 5×12 .

Donc, $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 5 \times 12$.

On peut aussi explorer les sommes de 6 entiers consécutifs par essais systématiques:

⋮

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 51$$

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$$

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 63$$

⋮

On voit que la somme de six entiers consécutifs ne peut pas être égale à 58.

On peut aussi conclure, comme dans la partie c), que la somme des trois premiers entiers doit être divisible par 3, de même que la somme des trois derniers entiers. Donc, la somme des six entiers consécutifs doit aussi être divisible par 3. Puisque 58 n'est pas divisible par 3, il ne peut pas être égal à la somme de six entiers consécutifs.

On peut aussi montrer que la somme de huit, neuf ou dix entiers consécutifs ne peut pas être égale à 58. Or, la plus petite somme possible que l'on peut former avec onze entiers consécutifs est égale à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$, ou 66, ce qui est trop grand. Il n'y a donc plus d'autres possibilités. Donc, il n'y a qu'une seule façon d'écrire 58 comme une somme d'entiers consécutifs, soit comme dans la partie d).