Emmy Noether — 2e cercle de 2011-2012

Partie I : Problèmes

Problème 1

Le canal Rideau est un réseau de lacs, de rivières et de canaux, d'une longueur de 202 km, qui relie Ottawa, la capitale du Canada, à la ville de Kingston, à l'extrémité est du lac Ontario. En hiver, à Ottawa, une longueur de 7,8 km du canal est aménagée pour le patinage.

a) En 2009, lors du concours d'habiletés de la LNH, Andrew Cogliano a remporté le concours de vitesse en patinant à 35,78 km à l'heure. À cette vitesse, combien de temps mettrait-il pour patiner la longueur de la patinoire sur le canal ? Réponds en heures, puis en minutes.

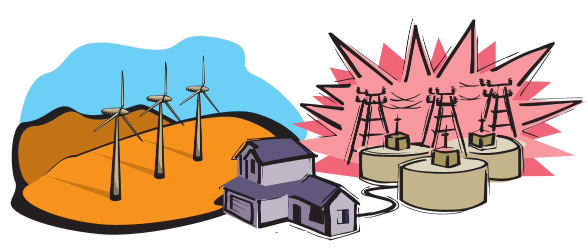
b) Jeremy Wotherspoon, un des patineurs de vitesse les plus rapides au Canada, patine à 52,89 km à l'heure. Usain Bolt, le coureur le plus rapide au monde en 2011, peut franchir 100 m en 9,69 secondes. Si Jeremy patinait la longueur du canal à sa vitesse maximale, pendant que Usain courait sur la piste qui longe le canal à sa vitesse maximale, qui mettrait le moins de temps pour se rendre à l'autre bout ?

Problème 2

Une turbine éolienne peut générer environ 2 megawatts d'énergie, ce qui peut alimenter environ 500 maisons. (Tu peux supposer que toutes les turbines dans ce problème sont semblables et qu'elles peuvent produire la même quantité d'énergie.)

a) En 2010, la production mondiale d'électricité par turbines éoliennes était de 70 000 megawatts. Combien faut-il de turbines pour produire cette électricité ?

b) Certains prédisent qu'en 2050, $\frac{1}{3}$ de la production mondiale d'électricité proviendra de turbines éoliennes. En 2006, on a consommé environ 16 378,62 millions de megawatts d'électricité dans le monde. Si la consommation mondiale ne changeait pas à partir de 2006, ce qui est improbable, combien d'électricité serait produite par les turbines éoliennes en 2050 ? Combien de turbines éoliennes faudrait-il pour produire cette électricité ?



c) En 2006, on a consommé 529,95 millions de megawatts au Canada. Le Canada comptait alors environ 30 millions d'habitants. Aux États-Unis, avec une population de 300 millions d'habitants, on a consommé 3816,85 millions de megawatts d'électricité. Compare la consommation d'électricité dans les deux pays.

Problème 3

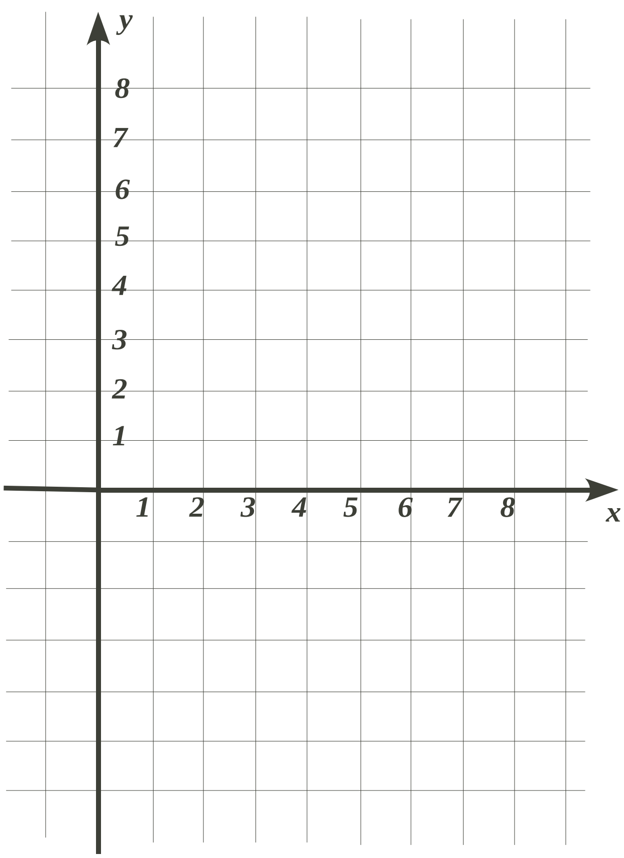
a) Place les points $A(2,2)$ et $B(6,2)$ dans le premier plan ci-dessous. Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un carré où pourrait-on placer les deux autres sommets, C et D, pour compléter le carré ? Peux-tu trouver plus d'une réponse ?

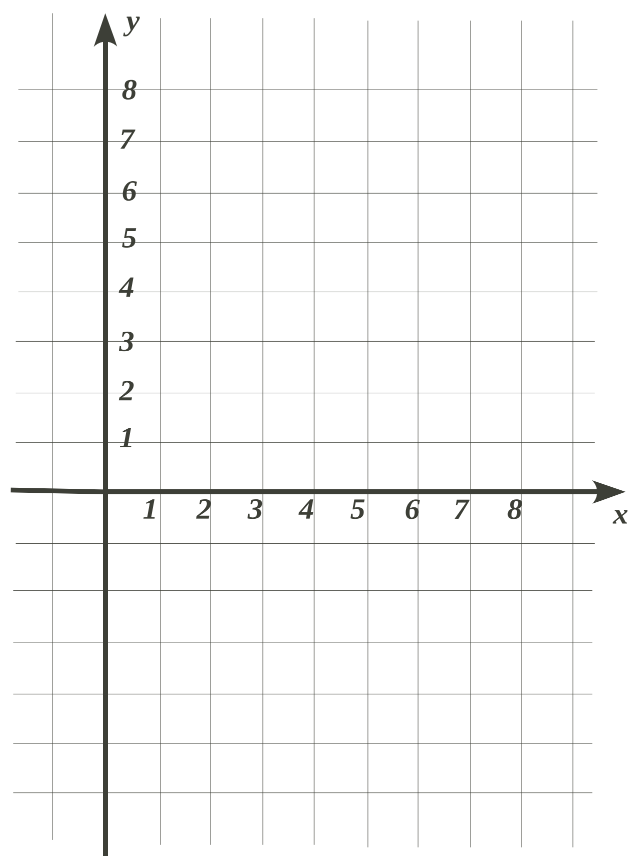
b) Place les deux mêmes points, A et B, dans le deuxième plan ci-dessous. Si ces points sont deux sommets d'un triangle rectangle, quelles pourraient être les coordonnées du troisième sommet C ? Y a-t-il plus d'une réponse ?

c) Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un rectangle, combien de paires de points C et D pourrait-on utiliser pour compléter le rectangle ?

Prolongement

Supposons que dans la partie c), le point C est le troisième sommet d'un triangle équilatéral. Fais une construction pour localiser le point C (on n'utilise pas les coordonnées).





Problème 4

Un nombre n est multiplié par 6, puis on soustrait 1 du résultat.

Glossaire

Expression algébrique : ensemble de nombres et de variables reliés entre eux par des opérations

Nombre composé : nombre entier supérieur à 1 qui a plus de deux diviseurs entiers

Nombre premier : nombre entier supérieur à 1 qui a exactement deux diviseurs entiers

a) Écris une expression algébrique qui représente cette phrase.

b) Les valeurs de n sont des nombres entiers positifs. Dans cette expression algébrique, quelle est la plus petite valeur de n qui produit un nombre composé ?

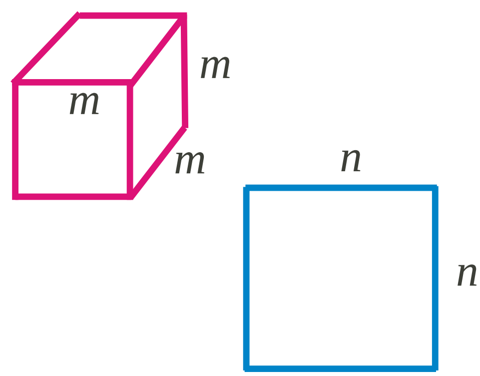
c) Quelle est la plus petite valeur suivante de n qui ne produit pas un nombre premier ?

n	$6n$ - 1
1	5
2	11
⋮	⋮

Prolongement
Peux-tu prédire la valeur suivante de n qui produira un nombre composé ? Explique ton raisonnement.

Problème 5

On considère le volume V de cubes ayant des arêtes de longueur m, cette longueur étant toujours un nombre entier. On considère aussi l'aire A de certains carrés ayant des côtés de longueur m, cette longueur étant toujours un nombre entier. Il arrive parfois qu'une valeur particulière de m et une valeur particulière de n donnent la même valeur numérique pour V et pour A. Par exemple, si $m = 4$ et $n = 8$, on obtient $V = 4 \times 4 \times 4$, ou $V = \mathbf{64}$ et $A = 8 \times 8$, ou $A = \mathbf{64}$) et V et A ont la même *valeur numérique*.



a) Pour quelles autres valeurs de m inférieures à 10 peut-on trouver une valeur de n de manière que A et V aient la même valeur numérique ?

b) Qu'y a-t-il de spécial au sujet de ces nombres m ?

Prolongement
Essaie d'expliquer pourquoi ces nombres spéciaux sont les seules valeurs de m qui fonctionnent.

Problème 6 : Palindromes à étapes (Pour des groupes de quatre élèves)

Un palindrome est une expression qui reste la même, qu'on la lise de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, les nombres 2, 44, 101 et 8118 sont des palindromes numériques, tandis que 'radar' et 'élu par cette crapule' sont des palindromes formés de lettres. Les nombres 13, 24 et 245, de même que le mot 'arbre' ne sont pas des palindromes.

Le nombre 13 n'est pas un palindrome, mais si on renverse l'ordre de ses chiffres, on obtient 31 et la somme des deux nombres, $13 + 31 = 44$, est un palindrome. On dit que le nombre 13 forme un palindrome après une étape.

Le nombre 37 n'est pas un palindrome. Si on renverse l'ordre de ses chiffres, on obtient 73. Si on additionne les deux nombres, on obtient $37 + 73 = 110$, qui n'est pas un palindrome. Or, si on renverse l'ordre des chiffres de 110, on obtient 011. Si on additionne les deux nombres, on obtient $110 + 011 = 121$, qui est un palindrome. On dit que le nombre 37 forme un palindrome après deux étapes. Comme on le voit à la droite, le nombre 68 forme un palindrome après trois étapes.

$$\begin{array}{r} 37 \\ 73 \\ \hline 110 \\ 011 \\ \hline 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68 \\ 86 \\ \hline 154 \\ 451 \\ \hline 605 \\ 506 \\ \hline 1111 \end{array}$$

a) En groupes de quatre, utilisez les nombres de 10 à 70 pour déterminer le nombre d'étapes qu'il leur faut pour former un palindrome.

Un élève peut travailler les nombres de 10 à 25, un autre de 26 à 40, un autre de 41 à 55 et un autre de 56 à 70.

Tout en travaillant, placez le nombre dans la colonne appropriée du tableau. Dans la deuxième rangée, indiquez le palindrome obtenu.

Nombre d'étapes	0 étape	1 étape	2 étapes	3 étapes	4 étapes
Nombre	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66	13,	37,	68,	
Palindrome obtenu	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66	44,	121,	1111,	

b) Dans le tableau de 100 ci-dessous, les cases contenant des palindromes sont ombrées en gris. Coloriez en rouge les cases contenant les nombres de 10 à 70 qui forment des palindromes après une étape, en vert les cases contenant les nombres de 10 à 70 qui forment des palindromes après deux étapes, en bleu les cases contenant les nombres de 10 à 70 qui forment des palindromes après trois étapes et en jaune les cases contenant les nombres de 10 à 70 qui forment des palindromes après quatre étapes. Voyez-vous des régularités ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Prolongement

a) Vos réponses de la partie *a*) vous permettent de prédire les réponses pour certains nombres de 71 à 100. Quels sont ces nombres prévisibles ? Expliquez votre raisonnement. (Remarquez que le nombre 100 forme un palindrome après une étape.)

b) Quels sont les six nombres du bas du tableau qui n'ont pas été prévus ? Coloriez de la couleur appropriée les cases restantes du tableau, tout en laissant en blanc celles qui contiennent les six nombres mentionnés ci-dessus.