El CENTRO de EDUCACIÓN en
MATEMÁTICAS y COMPUTACIÓN

Problema de la semana
Problemas y Soluciones
2019 - 2020

Problema D (Grado 9/10)

Temas

Sentido Numérico (N)
Geometría (G)
Álgebra (A)
Manejo de Datos (D)
Pensamiento Computacional (C)

(Has clic en el nombre del tema para saltar a esa sección)

---

*Los problemas de este folleto están organizados de acuerdo a los temas del currículo. Un problema puede aparecer en varios temas.

Sentido Numérico (N)

VOLVER A LA PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

2020

Considera el siguiente arreglo de enteros positivos.

Fila 1	1					
Fila 2	2	3				
Fila 3	4	5	6			
Fila 4	7	8	9	10		
Fila 5	11	12	13	14	15	
Fila 6	16	17	18	19	20	21
$\vdots$						

Es posible continuar la lista con enteros positivos usando más filas y columnas, de tal forma que cada nueva fila contenga un entero más que la fila anterior.

¿Cuántos enteros menores que 2020 están en la *columna* que contiene al número 2020?

¿Sabías que la suma de los enteros positivos del 1 al n se puede determinar usando la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$? Es decir, $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Por ejemplo, la suma de los enteros $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(5)}{2} = 10$. Este resultado se puede verificar simplemente, sólo debemos sumar los 4 números. También se puede verificar facilmente, que la suma de los primeros 5 enteros positivos es $\frac{5(6)}{2} = 15$.

Esta fórmula puede ser útil para resolver este problema. Como ejercicio extra, puedes demostrar que esta fórmula se cumple para todo entero positivo n.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

2020

Problema
Considera el siguiente arreglo de enteros positivos.

Fila 1	1					
Fila 2	2	3				
Fila 3	4	5	6			
Fila 4	7	8	9	10		
Fila 5	11	12	13	14	15	
Fila 6	16	17	18	19	20	21
⋮						

Es posible continuar la lista con enteros positivos usando más filas y columnas, de tal forma que cada nueva fila contenga un entero más que la fila anterior.

¿Cuántos enteros menores que 2020 están en la *columna* que contiene al número 2020?

Solución

Notemos que en el arreglo hay un número en la Fila 1, hay dos números en la Fila 2, tres números en la Fila 3, y así sucesivamente, hay n números en la Fila n.

Los números en las filas contienen a los enteros positivos en orden, empezando con el 1 en la Fila 1, y cada nueva fila contiene un entero más que la fila anterior. Entonces, el último número en cada fila es igual a la suma de la cantidad de números en cada fila de la tabla, hasta esa fila.

Por ejemplo, el último número en la Fila 4 es 10, que es igual a la suma de la cantidad de números en las filas 1, 2, 3 y 4. Pero la cantidad de números en cada fila es igual al número de la fila. Por lo tanto, 10 es igual a la suma 1 + 2 + 3 + 4.

Es decir, el último número de la Fila n es igual a

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Podemos encontrar en qué fila está el entero 2020, usando prueba y error de la siguiente manera.

Observemos que $\frac{63(63+1)}{2} = 2016$, entonces el último número en la Fila 63 es 2016.

Tambien tenemos que $\frac{64(64+1)}{2} = 2080$, así que el último número en la Fila 64 es 2080.

Como 2020 está entre 2016 y 2080, entonces debe aparecer en algún lugar de la Fila 64.

De forma alternativa, para obtener la fila en la que está el 2020 podemos usar la fórmula cuadrática para encontrar n, resolviendo la ecuación $\frac{n(n+1)}{2} = 2020$.

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} &= 2020 \\
n(n+1) &= 4040 \\
n^2 + n - 4040 &= 0 \\
n &\approx 63.1 \text{ (usando la fórmula cuadrática y que } n \geq 0)
\end{aligned}$$

Esto significa que el entero 2020 estará en la Fila 64.

Si nos fijamos en el arreglo original. El primer número en la Fila 6, que es 16, tiene cinco números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 6, que es 17, tiene cuatro números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.
Además, observemos que el primer número en la Fila 5, que es 11, tiene cuatro números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 5, que es 12, tiene tres números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.
El patrón que encontramos es que el primer número en la Fila n tiene $n-1$ números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila n tiene $n-2$ números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.

Por lo tanto, el primer número en la Fila 64, que es 2017, tendrá 63 números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 64, que es 2018, tendrá 62 números en la columna encima de él. El tercer número en la Fila 64, que es 2019, tendrá 61 números en la columna encima de él. El cuarto número en la Fila 64, que es 2020, tendrá 60 números en la columna encima de él.

Por lo tanto, hay 60 enteros positivos menores que 2020 en la columna que contiene al número 2020.

Problema de la Semana

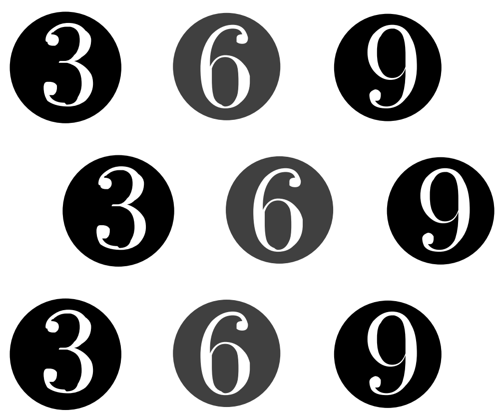
Problema D

Restringiendo Dígitos

Existen 9000 enteros positivos distintos que contienen 4 dígitos. Si agregamos restricciones en cómo formar estos números, puede que se reduzca la cantidad de posibles números de 4 dígitos obtenidos.

¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden crear con las siguientess restricciones?

- Los únicos dígitos que se pueden usar son 3, 6 y 9.
- Un dígito específico puede aparecer a lo más tres veces en el número.
- El número debe ser divisible entre 9.



¿Sabías qué?

Si la suma de los dígitos de un número es divisible entre 9, entonces el número es divisible entre 9. Si la suma de los dígitos de un número no es divisible entre 9, entonces el número no es divisible entre 9.

Por ejemplo, la suma de los dígitos de 3393 es 18, que es divisible entre 9, entonces 3393 es divisible entre 9. También, la suma de los dígitos de 9933 es 24, que no es divisible entre 9, entonces 9933 no es divisible entre 9.

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Restringiendo Dígitos

Problema

¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden crear de forma que los únicos dígitos que se pueden usar son 3, 6 y 9, un dígito específico puede aparecer a lo más tres veces en el número, y el número debe ser divisible entre 9?

Solución

Solución 1

Esta sólucion es para aquellos que vieron todas los posibles números de cuatro dígitos que se pueden crear con los dígitos dados. Hay varias formas de crear los números, y serán 78 números los que hay que revisar. De los 78 números, 26 de ellos son divisibles entre 9. En una solución como esta, debemos ser muy cuidadosos para que no nos falte ningún número.

Solución 2

En esta solución nos enfocamos en los posibles valores que podemos obtener como suma de los cuatro dígitos.

La menor suma posible de los dígitos la podemos obtener sumando tres dígitos 3 y un dígito 6, lo que nos da una suma de 15. La máxima suma posible de los dígitos la obtendríamos sumando tres dígitos 9 y un dígito 6, lo que nos da una suma de 33. Ninguna de estas sumas es divisible entre 9. Sin embargo, entre 15 y 33 hay dos números (18 y 27) que son divisible entre 9. Así que debemos buscar cuatro dígitos cuya suma sea 18 o 27. En la siguiente tabla analizamos las posibles combinaciones de dígitos y sus respectivas sumas.

Cantidad de 3's	Cantidad de 6's	Cantidad de 9's	Suma de los dígitos	¿Divisible entre 9?
3	1	0	$3+3+3+6=15$	No
3	0	1	$3+3+3+9=18$	Sí
1	3	0	$3+6+6+6=21$	No
0	3	1	$6+6+6+9=27$	Sí
1	0	3	$3+9+9+9=30$	No
0	1	3	$6+9+9+9=33$	No
2	2	0	$3+3+6+6=18$	Sí
2	0	2	$3+3+9+9=24$	No
0	2	2	$6+6+9+9=30$	No
2	1	1	$3+3+6+9=21$	No
1	2	1	$3+6+6+9=24$	No
1	1	2	$3+6+9+9=27$	Sí

Ahora, podemos crear los números usando la información de las filas en las que la suma de los dígitos es divisible entre 9.

Primero podemos crear todos los números de cuatro dígitos que tienen tres dígitos 3 y un dígito 9. Los números son 3339, 3393, 3933 y 9333. Hay 4 números posibles.

Luego podemos crear todos los números de cuatro dígitos que tienen tres dígitos 6 y un dígito 9. Los números son 6669, 6696, 6966 y 9666. Hay 4 números posibles.

Después creamos los números de cuatro dígitos que contienen dos dígitos 3 y dos dígitos 6. Los números son 3366, 3636, 3663, 6633, 6363 y 6336. Hay 6 de estos números.

Finalmente, creamos todos que contienen dos dígitos 9, un 3 y un 6. Los números son 9936, 9963, 9396, 9693, 9369, 9639, 3996, 6993, 3969, 6939, 3699 y 6399. Estos números los podemos crear sistemáticamente. Primero ponemos los dos dígitos 9 en las seis formas posibles de ubicarlos en dos de las cuatro posiciones. Luego, para cada una de estas formas de ubicar los dígitos 9, el 3 y el 6 los podemos poner de dos formas distintas en los dos espacios que quedan. En total hay 12 de estos números.

Combinando los resultados, hay $4 + 4 + 6 + 12 = 26$ números de cuatro dígitos, divisibles entre 9, que se pueden crear con los dígitos dados.

Solución 3

Consideraremos cuatro casos dependiendo de la cantidad de dígitos 9 que hay en el número.

1. El número contiene tres dígitos 9. En este caso, la suma de los dígitos es 27 más el valor del cuarto dígito.
   - Si el cuarto dígito es 3, la suma de los dígitos es 30. Como 30 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contenga tres dígitos 9 y un 3.
   - Si el cuarto dígito es 6, la suma de los dígitos es 33. Como 33 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contenga tres dígitos 9 y un 6.

   En este caso no obtenemos ningún número de cuatro dígitos que sea divisible entre 9.

2. El número contiene dos dígitos 9. En este caso, la suma de los dígitos es 18 más la suma de los dos dígitos restantes.
   - Si los dos dígitos restantes son iguales a 3, la suma de los dígitos es 24. Como 24 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contengan dos dígitos 9 y dos dígitos 3.
   - Si los dos dígitos restantes son iguales a 6, la suma de los dígitos es 30. Como 30 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contengan dos dígitos 9 y dos dígitos 6.
   - Si de los dos dígitos restantes uno es 3 y el otro es 6, la suma de los dígitos es igual a 27. Como 27 es divisible entre 9, existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contienen dos dígitos 9, un 3 y un 6. Usando estos dígitos podemos crear doce números de cuatro dígitos, cada uno de los cuales contiene dos dígitos 9, un 3 y un 6.

Los números son 9936, 9963, 9396, 9693, 9369, 9639, 3996, 6993, 3969, 6939, 3699 y 6399. (Para encontrar estos números podemos poner los dos dígitos 9 en las cuatro posiciones de seis formas distintas y luego, para cada una de estas formas, en los espacios que quedan acomodamos el 3 y el 6 de dos formas distintas).

Este caso produce 12 números de cuatro dígitos que son divisibles entre 9.

3. El número contiene un dígito 9. En este caso, la suma de los dígitos es 9 más la suma de los tres dígitos restantes.
   - Si cada uno de los tres dígitos restantes es igual 3, la suma de los dígitos es 18. Como 18 es divisible entre 9, existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contienen un 9 y tres dígitos 3. Hay cuatro números posibles: 3339, 3393, 3933 y 9333.
   - Si cada uno de los tres dígitos restantes es igual 6, la suma de los dígitos es 27. Como 27 es divisible entre 9, existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contienen un 9 y tres dígitos 6. Hay cuatro números posibles: 6669, 6696, 6966 y 9666.
   - Si uno de los dígitos restantes es 3 y los otros dos son 6, la suma de dígitos es 24. Como 24 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contenga un 9, un 3 y dos dígitos 6.
   - Si uno de los dígitos restantes es 6 y los otros dos son 3, la suma de dígitos es 21. Como 21 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contenga un 9, un 6 y dos dígitos 3.

   En este caso obtenemos 8 números de cuatro dígitos que son divisibles entre 9.

4. El número no contiene dígitos 9. En este caso, la suma de los dígitos es la suma de los cuatro dígitos restantes.
   - Si el número contiene tres dígitos 3 y un 6, la suma es 15. Como 15 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contengan tres dígitos 3 y un 6.
   - Si el número contiene tres dígitos 6 y un 3, la suma es 21. Como 21 no es divisible entre 9, no existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contengan tres dígitos 6 y un 3.
   - Si dos dígitos son 6 y dos dígitos son 3, la suma es 18. Como 18 es divisible entre 9, existen números de cuatro dígitos divisibles entre 9 y que contienen dos dígitos 6 y dos dígitos 3. Hay 6 números posibles: 3366, 3636, 3663, 6633, 6363 y 6336.

   En este caso obtenemos 6 números de cuatro dígitos que son divisibles entre 9.

Combinando los resultados de los cuatro casos, hay $0 + 12 + 8 + 6 = 26$ números de cuatro dígitos, divisibles entre 9, y que se pueden crear con los dígitos dados.

Problema de la Semana

Problema D

¡Un musical matemático!

Los alumnos de primer y último año de la Preparatoria Villa Matemática, presentarán un gran musical llamado “Matemáticas, ¿para qué son buenas?”. Un gran número de alumnos vino a una junta informativa. Después de una pequeña introducción al musical, 15 alumnos de último año decidieron que no era para ellos y se fueron. En ese momento, quedaron el doble de alumnos de primer año que de último año.

Más tarde, después de que se fueron los 15 alumnos de último año, también se fueron $\frac{3}{4}$ de los alumnos de primer año y $\frac{1}{3}$ de los alumnos de último año que quedaban. Esto hizo que quedaran 8 alumnos de último año más que alumnos de primer año. Todos los alumnos que quedaron se juntaron y crearon un musical impresionante.

¿Cuántos alumnos se quedaron a presentar el musical, “Matemáticas, ¿para qué son buenas?”

Matemáticas ¿para qué son buenas?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¡Un musical matemático!

Problema

Los alumnos de primer y último año de la Preparatoria Villa Matemática, presentarán un gran musical llamado "Matemáticas, ¿para qué son buenas?". Un gran número de alumnos vino a una junta informativa. Después de una pequeña introducción al musical, 15 alumnos de último año decidieron que no era para ellos y se fueron. En ese momento, quedaron el doble de alumnos de primer año que de último año. Más tarde, después de que se fueron los 15 alumnos de último año, también se fueron $\frac{3}{4}$ de los alumnos de primer año y $\frac{1}{3}$ de los alumnos de último año que quedaban. Esto hizo que quedaran 8 alumnos de último año más que alumnos de primer año. Todos los alumnos que quedaron se juntaron y crearon un musical impresionante. ¿Cuántos alumnos se quedaron a presentar el musical, "Matemáticas, ¿para qué son buenas"?

Solución

Representaremos por j a la cantidad de alumnos de primer año y por s a la cantidad de alumnos de último año que fueron a la junta informativa.

Luego de que 15 alumnos de último año se fueron, quedaron $(s - 15)$ en la junta. En este momento la cantidad de alumnos de primer año es el doble, así que $j = 2(s - 15)$, y simplificando obtenemos $j = 2s - 30$. (1)

Luego, se fueron $\frac{3}{4}$ de la cantidad de alumnos de primer año, lo cual deja a $\frac{1}{4}$ de ellos, es decir $\frac{1}{4}j$.
Además, $\frac{1}{3}$ de los alumnos de último año se van, que significa que se quedan $\frac{2}{3}$ de ellos, es decir $\frac{2}{3}(s - 15)$.
Ahora, hay 8 alumnos más de último año que de primer año, es decir $\frac{2}{3}(s - 15) = \frac{1}{4}j + 8$.
Multiplicando por 12 y simplificando obtenemos $8(s - 15) = 3j + 96$. Esto se puede escribir como $8s - 120 = 3j + 96$. (2)

En este momento, podemos usar sustitición o eliminación para resolver el sistema de ecuaciones. En este caso, sustituímos el valor de j que obtuvimos en (1) en la ecuación (2) para encontrar s.

$$\begin{aligned} 8s - 120 &= 3(2s - 30) + 96 \\ 8s - 120 &= 6s - 90 + 96 \\ 2s &= 126 \\ s &= 63 \end{aligned}$$

Si sustituimos $s = 63$ en (1), obtenemos que $j = 2(63) - 30 = 126 - 30 = 96$.

En conclusión:

La cantidad original de alumnos es $j + s = 96 + 63 = 159$.

La cantidad de alumnos de primer año que quedan es $\frac{1}{4}j = \frac{1}{4}(96) = 24$.

La cantidad de alumnos de último año que quedan es $\frac{2}{3}(s - 15) = \frac{2}{3}(63 - 15) = \frac{2}{3}(48) = 32$.

La cantidad total de alumnos que se quedaron a realizar el musical es $24 + 32 = 56$.

La producción final fue impresionante, aún cuando sólo se quedaron 56 de los 159 alumnos que iniciaron.

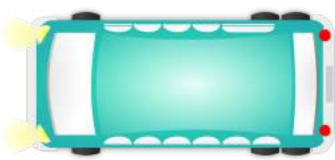
Problema de la Semana

Problema D

Caminos Separados

A las 7:00 a.m., Sahil conduce en dirección norte a 48 km/h. Al mismo tiempo y desde la misma intersección, Brenda conduce con dirección al oeste a 64 km/h.

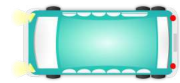
¿A qué hora la distancia entre ellos será de 260 km?



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Caminos Separados



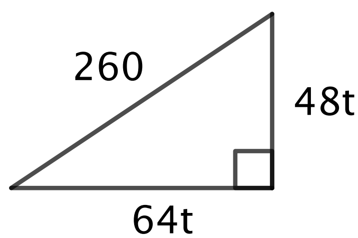
Problema

A las 7:00 a.m., Sahil conduce en dirección norte a 48 km/h. Al mismo tiempo y desde la misma intersección, Brenda conduce con dirección al oeste a 64 km/h. ¿A qué hora la distancia entre ellos será de 260 km?

Solución

Sea t el tiempo, en horas, que le toma a Sahil y Brenda estar a 260 km uno del otro. Como Sahil conduce a 48 km/h, recorrerá $48t$ km en t horas. De forma similar, como Brenda conduce a 64 km/h, recorrerá $64t$ km en t horas.

Como Sahil viaja al norte y Brenda al oeste, las direcciones en las que viajan forman un angulo recto. Podemos representar estas distancias usando el siguiente triángulo rectángulo.



Utilizando el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
(48t)^2 + (64t)^2 &= 260^2 \\
2304t^2 + 4096t^2 &= 67600 \\
6400t^2 &= 67600 \\
16t^2 &= 169 \\
t^2 &= \frac{169}{16}
\end{aligned}$$

Como $t > 0$, entonces $t = \frac{13}{4} = 3.25$, que equivale a 3 horas y 15 minutos de viaje. Por lo tanto, $48t = 48 \times \frac{13}{4} = 156$ y $64t = 64 \times \frac{13}{4} = 208$. Además, 3 h 15 min después de las 7:00 a.m. serían las 10:15 a.m.

Concluimos que a las 10:15 a.m. la distancia entre Sahil y Brenda será de 260 km. A esa hora, Sahil habrá viajado 156 km y Brenda 208 km.

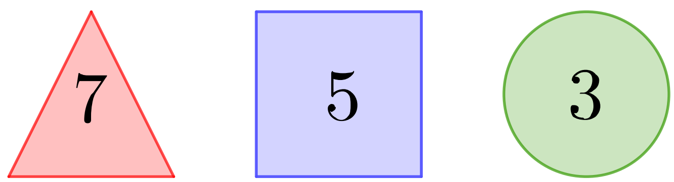
Problema de la Semana

Problema D

Lotería Geométrica

Felipe llevó al colegio tres bolsas con fichas geométricas de diferentes colores. La primera bolsa tiene 22 fichas **verdes** circulares, marcadas con los números del 1 al 22. La segunda bolsa tiene 15 fichas **rojas** triangulares, marcadas con los números del 1 al 15. Y la tercera bolsa tiene 10 fichas **azules** cuadradas, marcadas con los números del 1 al 10.

Felipe observó que hay un total de $22 \times 15 \times 10 = 3300$ combinaciones distintas de fichas que se pueden obtener si elegimos una ficha de cada bolsa al azar. Observa que elegir las fichas 7 roja, 5 azul y 3 verde es distinto de elegir las fichas 5 roja, 7 azul y 3 verde. El orden en que fueron elegidas no importa.



Felipe nos ha dicho que saquemos una ficha de cada bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más de las fichas que escojamos estén marcadas con el número 5?

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Lotería Geométrica

Problema

Felipe llevó al colegio tres bolsas con fichas geométricas de diferentes colores. La primera bolsa tiene 22 fichas **verdes** circulares, numeradas del 1 al 22. La segunda bolsa tiene 15 fichas **rojas** triangulares, numeradas del 1 al 15. Y la tercera bolsa tiene 10 fichas **azules** cuadradas, numeradas del 1 al 10.

Felipe nos ha dicho que saquemos una ficha de cada bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más de las fichas que escojamos estén marcadas con el número 5?

Solución

Solución 1

Hay 22 fichas distintas que podemos elegir de la primera bolsa, 15 fichas distintas que podemos elegir de la segunda bolsa, y 10 fichas distintas que podemos elegir de la tercera bolsa. En cada bolsa, las fichas estan marcadas con un número distinto. Por lo tanto, hay un total de $22 \times 15 \times 10 = 3300$ combinaciones distintas de números que se pueden obtener al elegir una ficha de cada bolsa.

Para contar la cantidad de combinaciones en las que el 5 aparece en al menos dos fichas, consideraremos los siguientes casos:

1. Cada una de las fichas seleccionadas tiene un 5.

   Esto solo puede ocurrir de una forma.
2. Un 5 aparece en las fichas verde y roja pero no en la ficha azul.

   Hay 9 opciones para la ficha azul, excluyendo el 5. Por lo tanto, un 5 puede aparecer en las fichas verde y roja pero no en la ficha azul en un total de 9 formas distintas.
3. Un 5 aparece en las fichas verde y azul pero no en la ficha roja.

   Hay 14 opciones para la ficha roja, excluyendo el 5. Por lo tanto, un 5 puede aparecer en las fichas verde y azul pero no en la ficha roja en un total de 14 formas distintas.
4. Un 5 aparece en las fichas roja y azul pero no en la ficha verde.

   Hay 21 opciones para la ficha verde, excluyendo el 5. Por lo tanto, un 5 puede aparecer en las fichas roja y azul pero no en la ficha verde en un total de 21 formas distintas.

Si sumamos los resultados para cada uno de los casos, el número total de formas en las que un 5 puede paracer en al menos dos fichas es $1 + 9 + 14 + 21 = 45$. La probabilidad de que aparezca un 5 en al menos dos fichas es $\frac{45}{3300} = \frac{3}{220}$.

Solución 2

Esta solución usa el siguiente resultado de Teoría de Probabilidad: Si la probabilidad de que ocurra un evento A es a, la probabilidad de que ocurra un evento B, es b, la probabilidad de que ocurra un evento C, es c, y los resultados no dependen el uno del otro, entonces la probabilidad de que sucedan los tres eventos al mismo tiempo es $a \times b \times c$.

La probabilidad de que un número específico sea seleccionado de la bolsa verde es $\frac{1}{22}$ y la probabilidad de que un número específico no sea seleccionado de la bolsa verde es $\frac{21}{22}$.

Similarmente, la probabilidad de que un número específico sea seleccionado de la bolsa roja es $\frac{1}{15}$ y la probabilidad de que un número específico no sea seleccionado de la bolsa roja es $\frac{14}{15}$.

Y la probabilidad de que un número específico sea seleccionado de la bolsa azul es $\frac{1}{10}$ y la probabilidad de que un número específico no sea seleccionado de la bolsa azul es $\frac{9}{10}$.

Ahora, usemos la notación $P(p, q, r)$ para referirnos a la probabilidad de que p sea seleccionado de la bolsa verde, q sea seleccionado de la bolsa roja, y r sea seleccionado de la bolsa azul. Por ejemplo, $P(5, 5, \text{ no } 5)$ significa que queremos la probabilidad de que un 5 sea seleccionado de la bolsa verde, un 5 sea seleccionado de la bolsa roja, y culquier número excepto un 5 sea seleccionado de la bolsa azul.

$$
\begin{aligned}
& \text{Probabilidad de elegir un 5 en al menos dos bolsas} \\
= \; & \text{Probabilidad de elegir tres 5's} + \text{Probabilidad de elegir exactamente dos 5's} \\
= \; & \mathrm{P}(5,\ 5,\ 5) + \mathrm{P}(5,\ 5,\ \text{no } 5) + \mathrm{P}(5,\ \text{no } 5,\ 5) + \mathrm{P}(\text{no } 5,\ 5,\ 5) \\
= \; & \frac{1}{22} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{22} \times \frac{1}{15} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{22} \times \frac{14}{15} \times \frac{1}{10} + \frac{21}{22} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{10} \\
= \; & \frac{1}{3300} + \frac{9}{3300} + \frac{14}{3300} + \frac{21}{3300} \\
= \; & \frac{45}{3300} \\
= \; & \frac{3}{220}
\end{aligned}
$$

Concluimos que la probabilidad de que aparezca un 5 en al menos dos fichas es $\frac{3}{220}$.

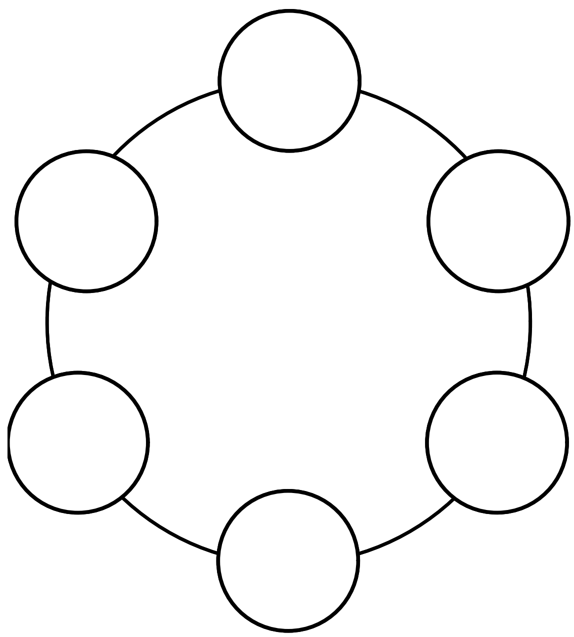
Problema de la Semana

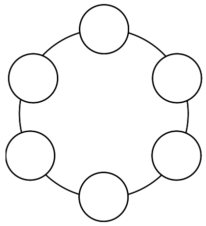
Problema D

Arreglos numéricos.

Los números 1, 6, 8, 13, 15 y 20 se pueden ubicar en el círculo que se muestra a continuación, de tal manera que cada uno de los números aparezca exactamente una vez y que la suma de cada par de números en círculos adjacentes sea un múltiplo de siete.

Determina todas las maneras *diferentes* (es decir, arreglos diferentes) de ubicar los números en el círculo satisfaciendo estas dos condiciones. Nota que dos arreglos de números se consideran el mismo si es posible obtener uno del otro usando una serie de reflecciones y/o rotaciones del diagrama.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Arreglos numéricos.

Problema

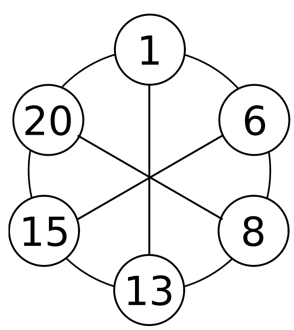
Los números 1, 6, 8, 13, 15 y 20 se pueden ubicar en el círculo que se muestra a continuación, de tal manera que cada uno de los números aparezca exactamente una vez y que la suma de cada par de números en círculos adjacentes sea un múltiplo de siete. Determina todas las maneras *diferentes* (es decir, arreglos diferentes) de ubicar los números en el círculo satisfaciendo estas dos condiciones. Nota que dos arreglos de números se consideran el mismo si es posible obtener uno del otro usando una serie de reflecciones y/o rotaciones del diagrama.

Solución

Primero escribimos todas las parejas de números cuya suma es un múltiplo de 7.

Suman 7	Suman 14	Suman 21	Suman 28	Suman 35
1,6	1,13	6,15	13,15	15,20
	6,8	8,13	8,20	
		1,20		

Podemos visualizar mejor esta tabla si situamos los números en un círculo, y dibujamos una linea conectando los números cuya suma es multiplo de 7.

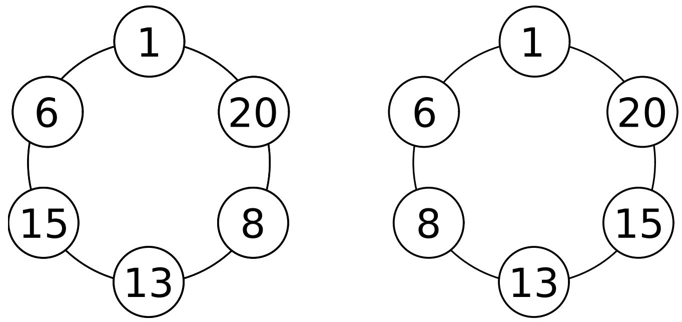


Determinaremos los diferentes arreglos estudiando varios casos. Nota que dos arreglos son diferentes, si hay al menos un número que es adjacente a números diferentes en cada arreglo.

Primero, consideremos los números que puden ser adjacentes a 1. Observamos que 6, 13, y 20 son los únicos números en nuestra lista cuya suma con 1 es un múltiplo de 7, así que tenemos tres posibles casos: 1 es adjacente a 6 y 20, 1 es adjacente a 6 y 13, y 1 es adjacente a 13 y 20. Consideramos cada caso por separado.

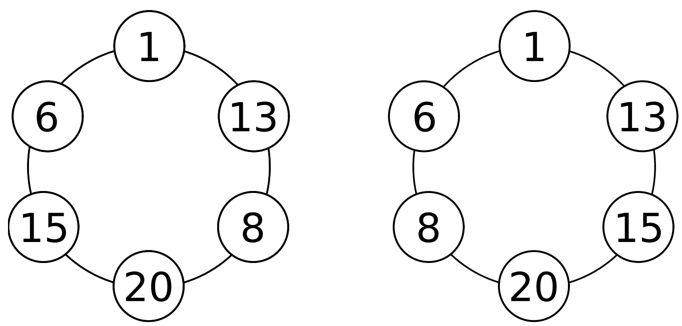
Caso 1: 1 es adjacente a 6 y 20

En este caso, la tabla nos indica que 13 debe ser adjacente a 15 y 8, pues 1 ya no esta disponible. Las dos posibles formas de situar estos números se muestran a continuación.



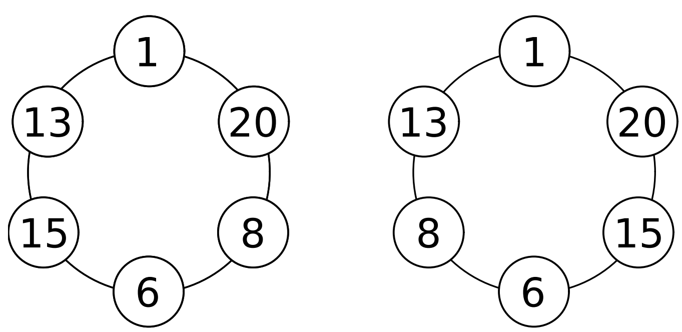
Caso 2: 1 es adjacente a 6 y 13

Aquí, la tabla nos dice que 20 debe ser adjacente a 15 y 8, ya que 1 no esta disponible. De nuevo, hay solo dos posibilidades:



Caso 3: 1 es adjacente a 13 y 20

En este caso, la tabla nos dice que 6 debe ser adjacente a 15 y 8. Las dos últimas posibilidades serían:



Así, hemos encontrado que en total existen 6 arreglos diferentes. Estos se muestran en los Casos 1 a 3 arriba.

Geometría (G)

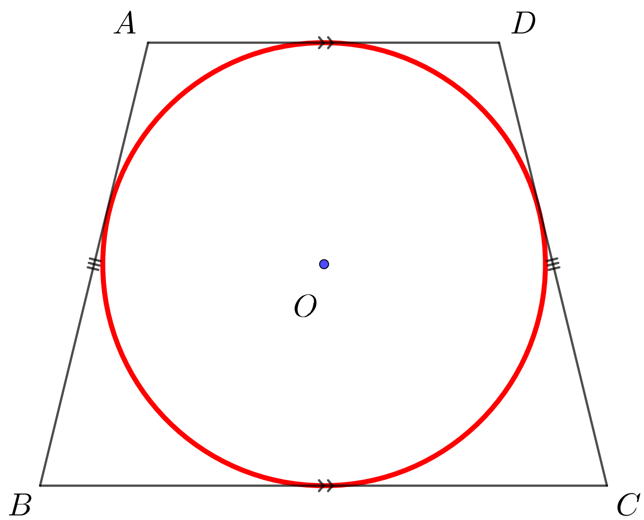
VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

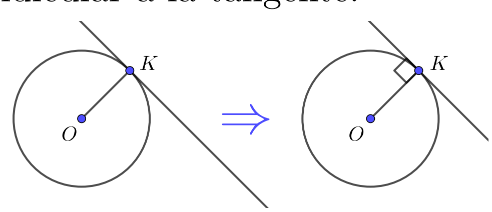
Construyendo Trapecios

El cuadrilátero $ABCD$ está construido alrededor del círculo con centro O y radio 15 cm de forma que cada lado de $ABCD$ es tangente al círculo, los lados AD y BC son paralelos, y las longitudes de los lados AB y DC son iguales. $ABCD$ es conocido como trapecio isósceles.
Si el área de $ABCD$ es $1000\,\text{cm}^2$, determina las longitudes de los dos lados iguales, AB y DC.

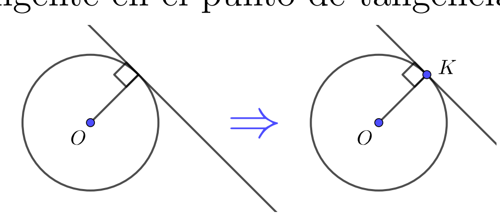


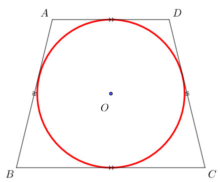
Para este problema, puedes utilizar sin demostración los siguientes dos resultados.

- Un segmento trazado desde el centro de un círculo, O, hasta un punto de tangencia, K, es perpendicular a la tangente.



- Un segmento trazado desde el centro de un círculo, O, perpendicular a la tangente, corta a la tangente en el punto de tangencia, K.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

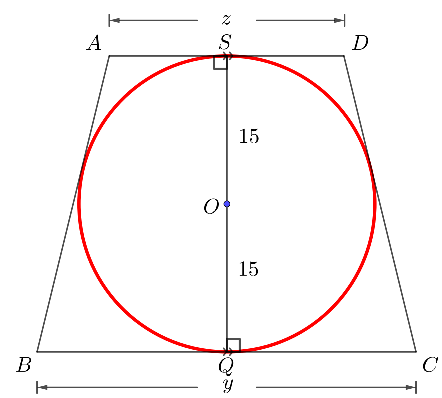
Construyendo Trapecios

Problema

El cuadrilátero $ABCD$ está construido alrededor del círculo con centro O y radio 15 cm de forma que cada lado de $ABCD$ es tangente al círculo, los lados AD y BC son paralelos, y las longitudes de los lados AB y DC son iguales. $ABCD$ es conocido como trapecio isósceles. Si el área de $ABCD$ es $1000\,\text{cm}^2$, determina las longitudes de los dos lados iguales, AB y DC.

Solución

Solución 1



Denotaremos por z a la longitud del lado AD y por y a la longitud del lado BC.

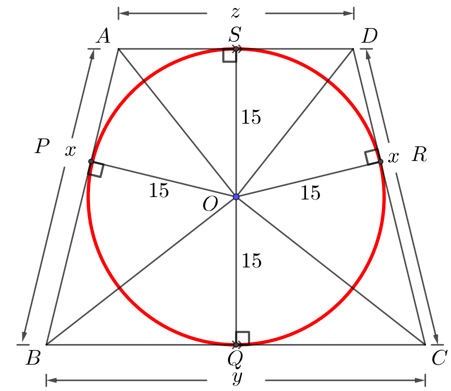
Tracemos un segmento que pase por O y que sea perpendicular a los lados AD y BC.

Usando el segundo resultado que está debajo del enunciado del problema, sabemos que esta perpendicular corta a AD en el punto de tangencia S y corta a BC en el punto de tangencia Q.

Tanto OS como OQ son radios del circulo. Como $SQ = OS + OQ$, se sigue que SQ es un diámetro del círculo que tiene longitud 30 cm. Como SQ es perpendicular a los dos lados paralelos del trapecio, podemos usar SQ como la altura del trapecio.

La formula del área para un trapecio nos dice que

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{SQ \times (AD + BC)}{2} \\
1000 &= \frac{30 \times (z + y)}{2} \\
1000 &= 15(z + y) \\
\frac{1000}{15} &= z + y \\
\frac{200}{3} &= z + y \qquad (1)
\end{aligned}$$



Denotemos por x a la longitud de los dos lados iguales, AB y DC.

Tracemos los segmentos que unen el centro O con cada uno de los vértices de $ABCD$, de forma que obtenemos cuatro triángulos, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, y $\triangle DOA$.

Tracemos los segmentos que unen el centro O con cada uno de los puntos de tangencia, P, Q, R, y S, en AB, BC, CD, y DA, respectivamente.

Cada uno de los segmentos es un radio, así que $OP = OQ = OR = OS = 15$. Gracias al primer resultado que se dio después del enunciado del problema, sabemos que cada uno de estos segmentos es perpendicular a la tangente por ese punto. Por lo tanto, cada uno de estos radios es una altura de su respectivo triángulo.

Ahora podemos encontrar el área del trapecio de otra forma, sumando las áreas de los cuatro triángulos:

$$\text{Área } \triangle AOB = OP \times AB \div 2 = \frac{15x}{2}, \quad \text{Área } \triangle BOC = OQ \times BC \div 2 = \frac{15y}{2}$$

$$\text{Área } \triangle COD = OR \times CD \div 2 = \frac{15x}{2} \quad \text{Área } \triangle DOA = OS \times AD \div 2 = \frac{15z}{2}$$

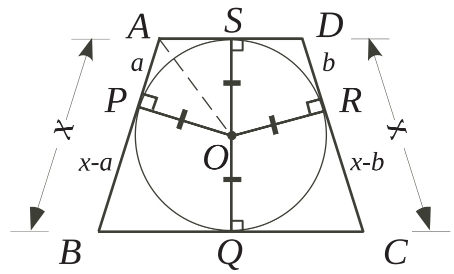
$$\begin{aligned}
\text{Área } \triangle AOB + \text{Área } \triangle BOC + \text{Área } \triangle COD + \text{Área } \triangle DOA &= 1000\\
\frac{15x}{2} + \frac{15y}{2} + \frac{15x}{2} + \frac{15z}{2} &= 1000\\
15x + \frac{15y}{2} + \frac{15z}{2} &= 1000\\
15x + \frac{15y + 15z}{2} &= 1000\\
15x + \frac{15(y+z)}{2} &= 1000\\
\text{Pero } y + z = \frac{200}{3} \text{ de (1) arriba, así que} \qquad 15x + \frac{15(\frac{200}{3})}{2} &= 1000\\
15x + 500 &= 1000\\
15x &= 500\\
x &= \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las longitudes de AB y DC son cada una $33\frac{1}{3}$ cm.

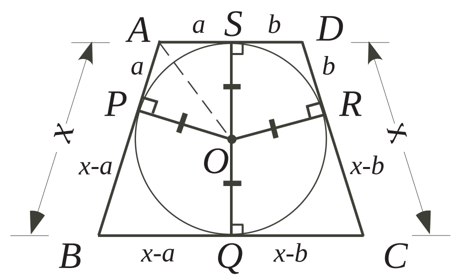
Solución 2

Sean P, Q, R y S los puntos de tangencia en AB, BC, CD y DA, respectivamente. Tracemos los segmentos OP, OQ, OR y OS. Entonces sabemos que $OP = OQ = OR = OS = 15$ porque todos son radios del círculo. Además, como cualquier línea trazada desde el centro del círculo hasta un punto de tangencia es perpendicular a la tangente, obtenemos que $\angle OPA = \angle OQB = \angle ORD = \angle OSA = 90°$.

Sea $AP = a$, $DR = b$ y sea x la longitud de los dos lados iguales. Por lo tanto, $PB = x - a$ y $RC = x - b$. El siguiente diagrama muestra lo que hemos mencionado.



Unamos A con O formando dos triángulos rectángulos, $\triangle APO$ y $\triangle ASO$. Usando el Teorema de Pitágoras, $AP^2 = AO^2 - OP^2$ y $AS^2 = AO^2 - OS^2$. Pero $OP = OS$ ya que ambos son radios. Así que las dos expresiones son iguales y obtenemos $AS = AP = a$.
Usando exactamente el mismo razonamiento que usamos para obtener $AP = AS = a$, podemos demostrar que $DR = DS = b$, $BP = BQ = x - a$ y $CR = CQ = x - b$. En el siguiente diagrama agregamos esta información.



Podemos usar la fórmula del área para trapecios. Al igual que en la Solución 1, podemos demostrar que $SQ = SO + OQ$ es una altura del trapecio. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Área Trapezoid } ABCD &= SQ \times (AD + BC) \div 2 \\
1000 &= (SO + OQ) \times ((AS + SD) + (BQ + QC)) \div 2 \\
1000 &= (15 + 15) \times ((a + b) + (x - a + x - b)) \div 2 \\
1000 &= (30) \times (2x) \div 2 \\
1000 &= 30x \\
\frac{100}{3} &= x
\end{aligned}$$

Así que podemos concluir que la longitud de $AB = DC$ es $33\frac{1}{3}$ cm.

Al final del enunciado del problema, dos resultados sin prueba fueron dados. Como extensión de este problema, puedes intentar demostrar estos dos resultados.

Problema de la Semana

Problema D

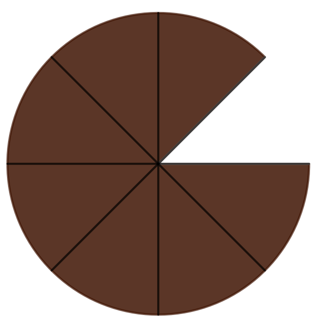
Mmmm... Pastel de Chocolate.

Para el cumpleaños de Amanda, Rhett preparó un delicioso pastel cilíndrico de chocolate. El radio y la altura de su pastel eran de la misma longitud. Rhett cortó el pastel en 8 rebanadas congruentes y se comió la primera rebanada para comprobar la calidad del pastel.

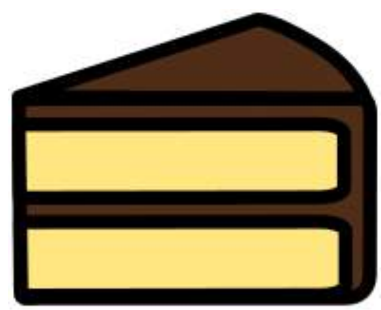
Luego, Rhett le preguntó a Amanda lo siguiente:

a) Después de quitar mi rebanada, ¿ha aumentado o disminuido la superficie total (teniendo en cuenta arriba, abajo y lados expuestos) de lo que queda del pastel?

b) ¿En qué porcentaje, redondeado a decimales, la superficie aumentó o disminiyó?



Vista superior del pastel sin la rebanada de Rhett



Rebanada que se comió Rhett.

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Mmmm... Pastel de Chocolate.

Problema

Para el cumpleaños de Amanda, Rhett preparó un delicioso pastel cilíndrico de chocolate. El radio y la altura del pastel eran de la misma longitud. Rhett cortó el pastel en 8 rebanadas congruentes y se comió la primera rebanada para comprobar la calidad del pastel. Al quitar la rebanada, ¿ha aumentado o disminuido la superficie total de lo que queda del pastel? ¿En qué porcentaje, redondeado a decimales, la superficie aumentó o disminiyó?

Solución

En la Figura 1 podemos observar un diagrama con las 3 partes que conforman el total de la superficie del pastel.

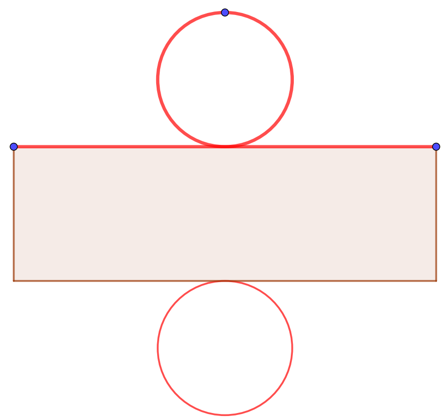


Fig. 1

La superficie total incluye las áreas de dos círculos de radio r y un rectángulo cuyo largo es igual a la longitud de la circunferencia, y cuyo ancho mide la altura del pastel, $h = r$.

$$\begin{aligned}\text{Superficie Total} &= 2\left(\pi r^2\right) + (2\pi r)(r),\\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r^2,\\ &= 4\pi r^2.\end{aligned}$$

Ahora, observa la Figura 2. Esta muestra las 3 partes que se quitaron de la superficie total.

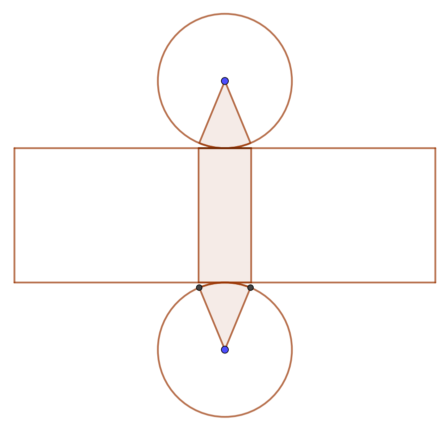


Fig. 2

La superficie que se quitó incluye $\frac{1}{8}$ del área de cada uno de los círculos de radio r y un rectángulo cuya área es $\frac{1}{8}$ del área del rectángulo original. Por lo tanto, la superficie removida es $\frac{1}{8}$ del total de la superficie.

$$\begin{aligned}\text{Superficie Removida} &= \frac{1}{8}\left(4\pi r^2\right),\\ &= \frac{1}{2}\pi r^2.\end{aligned}$$

Pero hay dos áreas que se agregan al remover el pastel.

A la derecha (Fig. 3) se muestra un diagrama con las 2 partes que se agregaron a la superficie total.

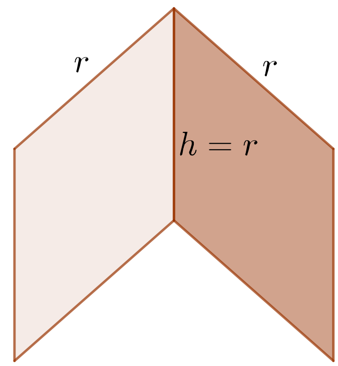


Fig. 3

La superficie añadida incluye 2 rectángulos, cada uno de largo r y ancho $h = r$.

$$\begin{aligned}\text{Superficie Agregada} &= 2(r)(r),\\ &= 2r^2.\end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular la nueva superficie total.

$$\begin{aligned}\text{Superficie} &= \text{Superficie Original} - \text{Superficie Removida} + \text{Superficie Agregada},\\ &= 4\pi r^2 - \frac{1}{2}\left(\pi r^2\right) + 2r^2,\\ &= 4\pi r^2 + r^2\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right).\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}\pi < 2$, entonces $-\frac{1}{2}\pi + 2 > 0$, y entonces la superficie aumenta cuando quitamos la rebanada.

Para calcular qué porcentaje ha aumentado la superficie, dividimos el incremento entre el área original. El incremento es $r^2\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right)$.

$$\begin{aligned}\text{Porcentaje de la superficie incrementado} &= \frac{r^2\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right)}{4\pi r^2} \times 100\%\\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right)}{4\pi} \times 100\%,\\ &= \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}\right) \times 100\%,\\ &= \left(\frac{-\pi + 4}{8\pi}\right) \times 100\%,\\ &\approx 3.4\%.\end{aligned}$$

La superficie del pastel se incrementa approximadamente 3.4% después de quitar la rebanada.

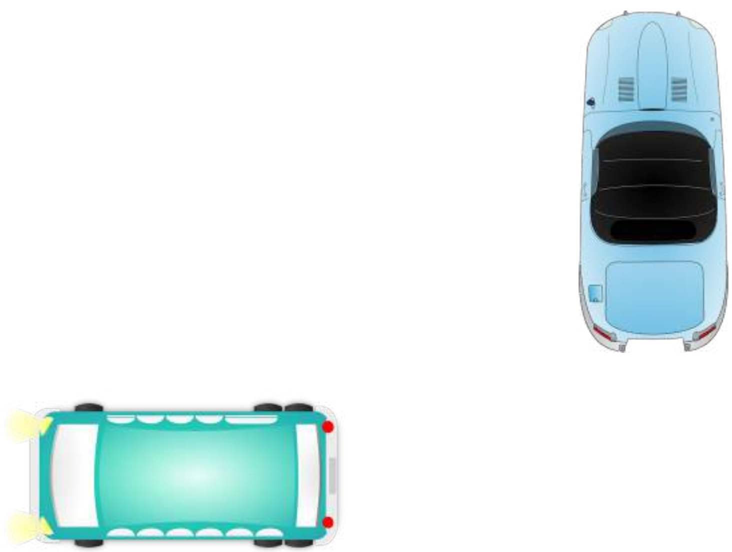
Problema de la Semana

Problema D

Caminos Separados

A las 7:00 a.m., Sahil conduce en dirección norte a 48 km/h. Al mismo tiempo y desde la misma intersección, Brenda conduce con dirección al oeste a 64 km/h.

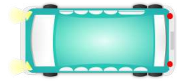
¿A qué hora la distancia entre ellos será de 260 km?



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Caminos Separados



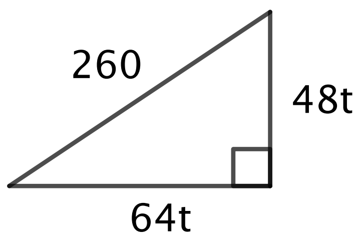
Problema

A las 7:00 a.m., Sahil conduce en dirección norte a 48 km/h. Al mismo tiempo y desde la misma intersección, Brenda conduce con dirección al oeste a 64 km/h. ¿A qué hora la distancia entre ellos será de 260 km?

Solución

Sea t el tiempo, en horas, que le toma a Sahil y Brenda estar a 260 km uno del otro. Como Sahil conduce a 48 km/h, recorrerá $48t$ km en t horas. De forma similar, como Brenda conduce a 64 km/h, recorrerá $64t$ km en t horas.

Como Sahil viaja al norte y Brenda al oeste, las direcciones en las que viajan forman un angulo recto. Podemos representar estas distancias usando el siguiente triángulo rectángulo.



Utilizando el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
(48t)^2 + (64t)^2 &= 260^2 \\
2304t^2 + 4096t^2 &= 67600 \\
6400t^2 &= 67600 \\
16t^2 &= 169 \\
t^2 &= \frac{169}{16}
\end{aligned}$$

Como $t > 0$, entonces $t = \frac{13}{4} = 3.25$, que equivale a 3 horas y 15 minutos de viaje. Por lo tanto, $48t = 48 \times \frac{13}{4} = 156$ y $64t = 64 \times \frac{13}{4} = 208$. Además, 3 h 15 min después de las 7:00 a.m. serían las 10:15 a.m.

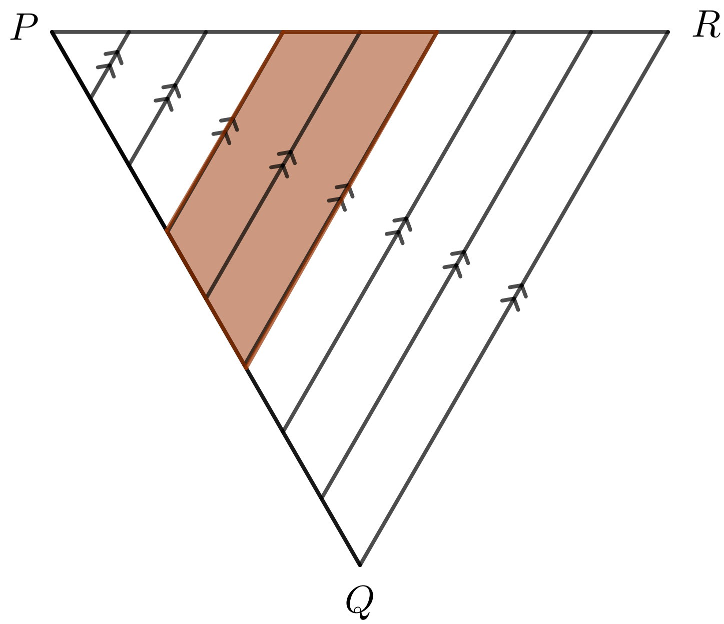
Concluimos que a las 10:15 a.m. la distancia entre Sahil y Brenda será de 260 km. A esa hora, Sahil habrá viajado 156 km y Brenda 208 km.

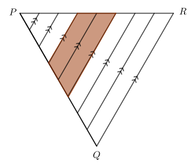
Problema de la Semana

Problema D

Un área sombría

El $\triangle PQR$, es un triángulo equilatero con lados de longitud de 32 cm. Tomamos dos lados, PR y PQ, y los dividimos en 8 segmentos del mismo tamaño. Cada punto de división en PR lo conectamos con su correspondiente punto de división en PQ, trazando 7 segmentos como se muestra en la figura. Cada uno de los nuevos segmentos es paralelo a QR, el tercer lado del triángulo. ¿Cuál es el área del trapecio sombreado?



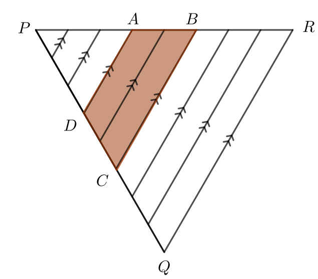


Problema de la Semana
Problema D y Solución
Un área sombría

Problema

El $\triangle PQR$, es un triángulo equilatero con lados de longitud de 32 cm. Tomamos dos lados, PR y PQ, y los dividimos en 8 segmentos del mismo tamaño. Cada punto de división en PR lo conectamos con su correspondiente punto de división en PQ, trazando 7 segmentos como se muestra en la figura. Cada uno de los nuevos segmentos es paralelo a QR, el tercer lado del triángulo. ¿Cuál es el área del trapecio sombreado?

Solución
Solución 1:



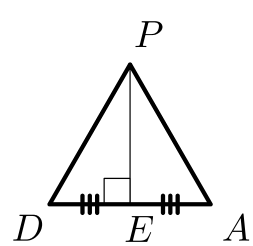
Denotemos los vértices del trapecio por A, B, C y D, como se muestra en la figura. En esta solución restaremos el área de $\triangle PDA$ del área de $\triangle PCB$ para obtener el área del trapecio $ABCD$.

Cada uno de los lados PR y PQ están divididos en 8 segmentos iguales de longitud $32 \div 8 = 4$ cm. PD y PA están cada uno formado por 3 de estos segmentos iguales, y PC y PB están cada uno formado por 5 de estos segmentos iguales. Por lo tanto, $PD = PA = 12$ cm y $PC = PB = 20$ cm.

Primero demostraremos que $\triangle PDA$ y $\triangle PCB$ son triángulos equiláteros.
Como $\triangle PQR$ es equilátero, $\angle PRQ = \angle PQR = \angle QPR = 60^\circ$. Como $\angle DPA$, $\angle CPB$ y $\angle QPR$ son el mismo ángulo, $\angle DPA = \angle CPD = \angle QPR = 60^\circ$.

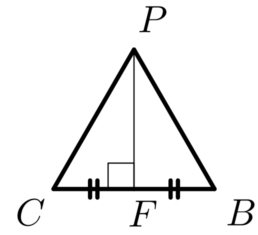
Como $DA \parallel CB \parallel QR$, entonces $\angle PDA = \angle PCB = \angle PQR = 60^\circ$ y $\angle PAD = \angle PBC = \angle PRQ = 60^\circ$.

Todos los ángulos internos de $\triangle PDA$ y $\triangle PCB$ miden 60°. Por lo tanto, ambos triángulos son equiláteros. $\triangle PDA$ tiene lados de longitud 12 cm y $\triangle PBC$ tiene lados de longitud 20 cm.



En $\triangle PDA$, trazamos la altura desde P al lado DA, y denotamos por E al pie de la perpendicular. Como $\triangle PDA$ es un triángulo equilátero, E es el punto medio de DA y se sigue que $DE = \frac{1}{2}DA = 6$ cm. Utilizando el Teorema de Pitágoras,
$PE^2 = PD^2 - DE^2 = 12^2 - 6^2 = 108$ y $DE = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$ cm (ya que $DE \geq 0$).

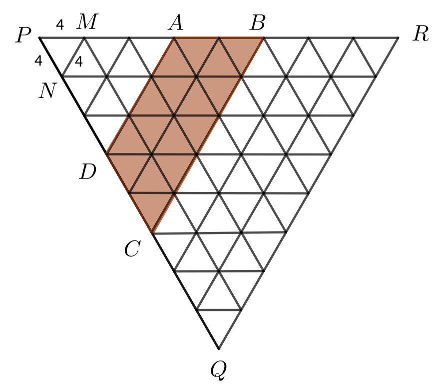
El área de $\triangle PDA = \frac{(PE)(DA)}{2} = \frac{(6\sqrt{3})(12)}{2} = 36\sqrt{3}$ cm^2.



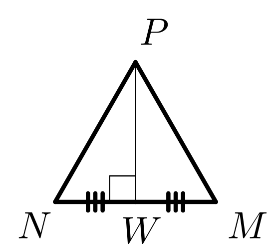
En $\triangle PCB$, trazamos la altura desde P al lado CB, y denotamos por F al pie de la perpendicular. Como $\triangle PCB$ es un triángulo equilátero, F es el punto medio de CB y se sigue que $CF = \frac{1}{2}CB = 10$ cm. Utilizando el Teorema de Pitágoras,
$PF^2 = PC^2 - CF^2 = 20^2 - 10^2 = 300$ y $PF = \sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}$ cm (ya que $PF \geq 0$).
El área de $\triangle PCB = \frac{(PF)(CB)}{2} = \frac{(10\sqrt{3})(20)}{2} = 100\sqrt{3}$ cm^2.
El área del trapecio $ABCD =$ área $\triangle PCB -$ área $\triangle PDA = 100\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ cm^2.

(Observa que también pudimos obtener las longitudes de PE y PF dándonos cuenta que $\triangle PDE$ y $\triangle PCF$ son triángulos 30°- 60°- 90° cuyos lados están en proporción $1 : \sqrt{3} : 2$).

Solución 2:



Como se muestra en el diagrama de la derecha, podemos triangular $\triangle PQR$ donde el triángulo equilatero de arriba a la izquierda tiene lados de longitud 4 cm. En el primer trapecio de la izquierda caben 3 triángulos equilateros, en el segundo trapecio de la izquierda caben 5 triángulos equilateros, en el tercer trapecio de la izquierda caben 7 triángulos equilateros, en el cuarto trapecio de la izquierda caben 9 triángulos equilateros, y así sucesivamente. La región sombreada contiene 16 triángulos equiláteros, cada uno con lados de longitud 4 cm. Para obtener el área de la región, primero obtendremos el área de un triángulo equilátero de lado 4 cm, y luego multiplicaremos el resultado por 16.



Denotemos por $\triangle PNM$ al pequeño triángulo equilátero. En $\triangle PNM$, trazamos la altura desde P al lado NM, y denotamos por W al pie de la perpendicular. Como $\triangle PNM$ es un triángulo equilátero, W es el punto medio de NM y se sigue que
$NW = \frac{1}{2}NM = 2$ cm.
Utilizando el Teorema de Pitágoras, $PW^2 = PN^2 - NW^2 = 4^2 - 2^2 = 12$ y $PW = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ cm (ya que $PW \geq 0$).
El área de $\triangle PNM = \frac{(PW)(NM)}{2} = \frac{(2\sqrt{3})(4)}{2} = 4\sqrt{3}$ cm^2.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $16 \times 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ cm^2.

(Observa que también pudimos obtener las longitud de PW dándonos cuenta que $\triangle PNW$ es un triángulo 30°- 60°- 90° y por lo tanto sus lados están en proporción $1 : \sqrt{3} : 2$).

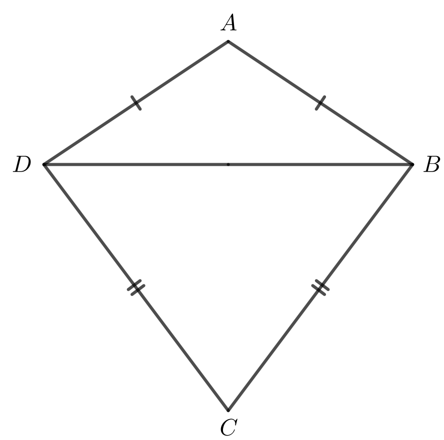
Problema de la Semana

Problema D

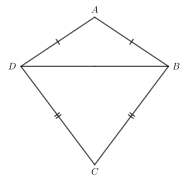
¿Vamos a volar la cometa?

El próximo fin de semana Amanda irá al parque a volar su cometa. La forma de la cometa está compuesta de un par de triángulos isósceles, $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$. La altura del triángulo $\triangle BCD$ es 2 veces la altura del triángulo $\triangle ABD$. El ancho de la cometa, BD, es 1.5 veces la altura del triángulo mas grande.

Si el área de la cometa es de 1800 cm^2, ¿cuál es el perímetro de la cometa?



¿Sabías que la altura de un triángulo isósceles correspondiente a la base es también es su mediatriz?



Problema de la Semana

Problema D y Solución

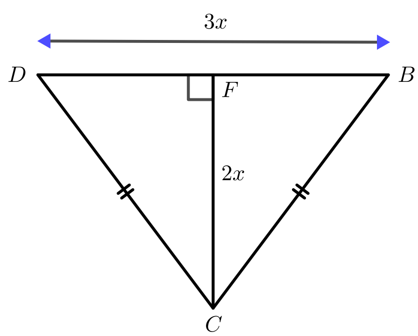
¿Vamos a volar la cometa?

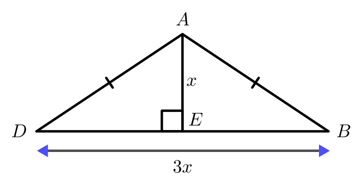
Problema

El próximo fin de semana Amanda irá al parque a volar su cometa. La forma de la cometa está compuesta de un par de triángulos isósceles, $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$. La altura del triángulo $\triangle BCD$ es 2 veces la altura del triángulo $\triangle ABD$. El ancho de la cometa, BD, es 1.5 veces la altura del triángulo mas grande. Si el área de la cometa es de 1800 cm^2, ¿cuál es el perímetro de la cometa?

Solución

Llamemos $x = AE$ a la altura del triángulo $\triangle ABD$. Entonces, la altura del triángulo $\triangle BCD$ es $CF = 2x$ y el ancho de la cometa es $BD = 3x$. Así que la longitud de la base de cada triángulo es $3x$.





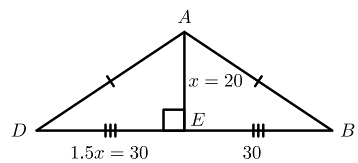
Podemos concluir que el área de $\triangle BCD$ es $\frac{(3x)(2x)}{2} = 3x^2$ y el área de $\triangle ABD$ es $\frac{(3x)(x)}{2} = \frac{3x^2}{2}$. Además,

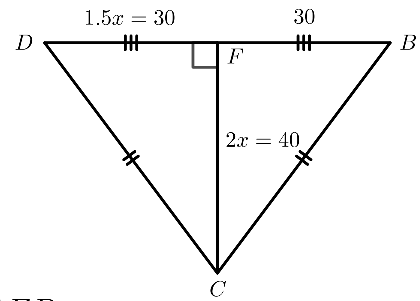
$$\begin{aligned}\text{área de la cometa } ABCD &= \text{área de } \triangle BCD + \text{área de } \triangle ABD \\ &= 3x^2 + \frac{3x^2}{2} \\ &= \frac{9x^2}{2}\end{aligned}$$

Como el área de la cometa es 1800cm^2, entonces

$$\begin{aligned}\frac{9x^2}{2} &= 1800 \\ 9x^2 &= 3600 \\ x^2 &= 400 \\ x &= 20, \quad \text{ya que } x > 0\end{aligned}$$

Ahora, para hallar el perímetro de la cometa, es necesario hallar la longitud de sus lados. Como el triángulo $\triangle ABD$ es isósceles, E es el punto medio de BD y por lo tanto $DE = BE = 1.5x = 30$. Usando un razonamiento similar, F es el punto medio de BD y $DF = BF = 1.5x = 30$. Esto se muestra en las siguientes figuras:





Usando el Teorema de Pitágoras con el triángulo $\triangle AED$,

$$\begin{aligned} AD^2 &= 20^2 + 30^2 \\ &= 400 + 900 \\ &= 1300 \\ AD &= \sqrt{1300}, \text{ ya que } AD > 0. \end{aligned}$$

Y por lo tanto $AB = AD = \sqrt{1300}$ cm.

Similarmente con el triángulo $\triangle DFC$,

$$\begin{aligned} DC^2 &= 30^2 + 40^2 \\ &= 2500 \\ DC &= 50, \text{ ya que } DC > 0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $BC = DC = 50$ cm.

Ya podemos entonces calcular el perímetro de la cometa.

$$\begin{aligned} \text{Perímetro de la cometa} &= \sqrt{1300} + \sqrt{1300} + 50 + 50 \\ &= 2\sqrt{1300} + 100 \\ &\approx 172.1 \end{aligned}$$

Así que, el perímetro es $2\sqrt{1300} + 100$ cm, lo que es aproximadamente unos 172.1 cm.

Nota:

Observa que la expresión $\sqrt{1300}$ se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\sqrt{1300} = \sqrt{100 \times 13} = \sqrt{100} \times \sqrt{13} = 10\sqrt{13}.$$

Por lo tanto, el perímetro exacto es

$$2\sqrt{1300} + 100 = 2(10\sqrt{13}) + 100 = 20\sqrt{13} + 100 \text{ cm}.$$

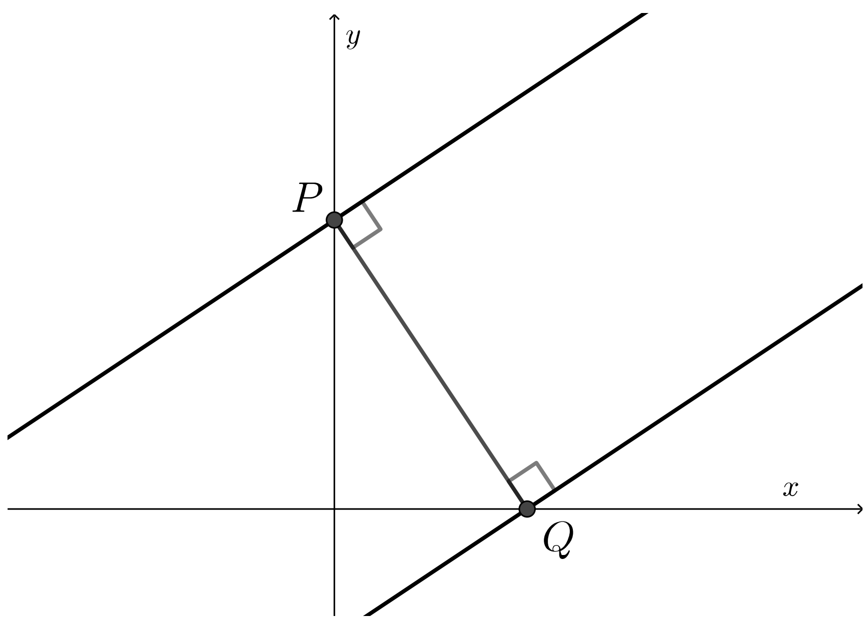
Problema de la Semana

Problema D

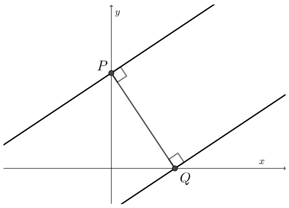
Hallando puntos de intersección

Se ha dibujado un par de líneas rectas en el plano (como se ilustra en la figura). La primera línea corta el eje y en el punto P, la segunda línea corta el eje x en el punto Q de tal forma que el segmento PQ es perpendicular a ambas líneas.

Si la equación de la línea que pasa por P es $y = mx + k$, determina el punto de corte con el eje y de la línea que pasa por Q en términos de m y k.



Sugerencia: Si encuentras el problema un poco difícil al inicio, considera resolverlo primero con un ejemplo específico de una línea que pase por P, como $y = 4x + 3$, y después intenta resolver el problema en su forma general.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Hallando puntos de intersección

Problema

Se ha dibujado un par de líneas rectas en el plano (como se ilustra en la figura). La primera línea corta el eje y en el punto P, la segunda línea corta el eje x en el punto Q de tal forma que el segmento PQ es perpendicular a ambas líneas. Si la equación de la línea que pasa por P es $y = mx + k$, determina el punto de corte con el eje y de la línea que pasa por Q en términos de m y k.

Solución

Para ayudarnos con notación, llamaremos a la primera línea l_1 y a la segunda l_2. Adicionalmente, llamemos l_3 a la recta que pasa por P y Q.

Como la ecuación de l_1 es $y = mx + k$, sabemos que la pendiente de l_1 es m y que su corte con el eje y es el punto $(0, k)$. Así que P es el punto $(0, k)$.

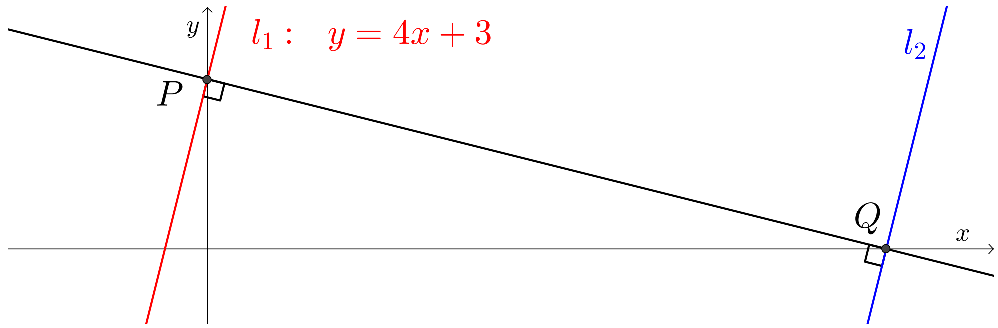
Ahora, como el segmento PQ es perpendicular a l_1, entonces la pendiente de la recta l_3 es igual a menos el recíproco de la pendiente de l_1, es decir, es igual a $-\frac{1}{m}$. También, el intercepto de la línea l_3 con el eje y es P, así que la ecuación de l_3 es $y = -\frac{1}{m}x + k$.

El intercepto de la línea l_3 con el eje x es Q. Este intercepto se puede hallar reemplazando $y = 0$ en la equación $y = -\frac{1}{m}x + k$ y despejando x. Entonces, de $0 = -\frac{1}{m}x + k$ obtenemos que $\frac{1}{m}x = k$ y finalmente que $x = km$. De esto concluimos que Q es el punto $(mk, 0)$.

Como el segmento PQ también es perpendicular a la línea l_2, entonces l_1 y l_2 son paralelas y la pendiente de l_2 es igual a m. El intercepto de la línea l_2 con el eje x es $Q = (mk, 0)$. Supongamos que la ecuación de la línea l_2 es $y = mx + b$ para algún b. Si reemplazamos $x = mk$ en esta ecuación, obtenemos $y = (m)(mk) + b = 0$ y concluimos que $b = -m^2k$.

Finalmente, concluimos que la ecuación de la recta l_2 es $y = mx - m^2k$ y el intercepto de la línea l_2 con el eje y es el punto $(0, -m^2k)$.

Si resolviste el problema asumiendo que la ecuación de la recta l_1 era $4x + 3$, debiste obtener -48 como el intercepto de l_2 con el eje y. En la página siguiente te damos una solución a este problema particular.



Llama l_1 a la recta que pasa por P y l_2 a la recta que pasa por Q. Adicionalmente, llamemos l_3 a la recta que pasa por P y Q.

Como la ecuación de l_1 es $y = 4x + 3$, sabemos que la pendiente de l_1 es 4 y que su corte con el eje y es el punto $P = (0, 3)$.

Ahora, como el segmento PQ es perpendicular a l_1, entonces la pendiente de la recta l_3 es igual a menos el recíproco de la pendiente de l_1, es decir, es igual a $-\frac{1}{4}$. También, el intercepto de la línea l_3 con el eje y es P, así que la ecuación de l_3 es $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

El intercepto de la línea l_3 con el eje x es Q. Este intercepto se puede hallar reemplazando $y = 0$ en la equación $y = -\frac{1}{4}x + 3$ y despejando x. Entonces, de $0 = -\frac{1}{4}x + 3$ obtenemos que $\frac{1}{4}x = 3$ y finalmente que $x = 12$. De esto concluimos que Q es el punto $(12, 0)$.

Como el segmento PQ también es perpendicular a la línea l_2, entonces l_1 y l_2 son paralelas y la pendiente de l_2 es igual a 4. El intercepto de la línea l_2 con el eje x es $Q = (12, 0)$. Supongamos que la ecuación de la línea l_2 es $y = 4x + b$ para algún b. Si reemplazamos $x = 12$ en esta ecuación, obtenemos $y = (4)(12) + b = 0$ y concluimos que $b = -48$.

Finalmente, concluimos que la ecuación de la recta l_2 es $y = 4x - 48$ y el intercepto de la línea l_2 con el eje y es el punto $(0, -48)$.

Álgebra (A)

VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

2020

Considera el siguiente arreglo de enteros positivos.

Fila 1	1					
Fila 2	2	3				
Fila 3	4	5	6			
Fila 4	7	8	9	10		
Fila 5	11	12	13	14	15	
Fila 6	16	17	18	19	20	21
⋮						

Es posible continuar la lista con enteros positivos usando más filas y columnas, de tal forma que cada nueva fila contenga un entero más que la fila anterior.

¿Cuántos enteros menores que 2020 están en la *columna* que contiene al número 2020?

¿Sabías que la suma de los enteros positivos del 1 al n se puede determinar usando la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$? Es decir, $1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Por ejemplo, la suma de los enteros $1+2+3+4=\frac{4(5)}{2}=10$. Este resultado se puede verificar simplemente, sólo debemos sumar los 4 números. También se puede verificar facilmente, que la suma de los primeros 5 enteros positivos es $\frac{5(6)}{2}=15$.

Esta fórmula puede ser útil para resolver este problema. Como ejercicio extra, puedes demostrar que esta fórmula se cumple para todo entero positivo n.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

2020

Problema
Considera el siguiente arreglo de enteros positivos.

Fila 1	1					
Fila 2	2	3				
Fila 3	4	5	6			
Fila 4	7	8	9	10		
Fila 5	11	12	13	14	15	
Fila 6	16	17	18	19	20	21
⋮						

Es posible continuar la lista con enteros positivos usando más filas y columnas, de tal forma que cada nueva fila contenga un entero más que la fila anterior.

¿Cuántos enteros menores que 2020 están en la *columna* que contiene al número 2020?

Solución

Notemos que en el arreglo hay un número en la Fila 1, hay dos números en la Fila 2, tres números en la Fila 3, y así sucesivamente, hay n números en la Fila n.

Los números en las filas contienen a los enteros positivos en orden, empezando con el 1 en la Fila 1, y cada nueva fila contiene un entero más que la fila anterior. Entonces, el último número en cada fila es igual a la suma de la cantidad de números en cada fila de la tabla, hasta esa fila.

Por ejemplo, el último número en la Fila 4 es 10, que es igual a la suma de la cantidad de números en las filas 1, 2, 3 y 4. Pero la cantidad de números en cada fila es igual al número de la fila. Por lo tanto, 10 es igual a la suma 1 + 2 + 3 + 4.

Es decir, el último número de la Fila n es igual a

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Podemos encontrar en qué fila está el entero 2020, usando prueba y error de la siguiente manera.

Observemos que $\frac{63(63+1)}{2} = 2016$, entonces el último número en la Fila 63 es 2016.

Tambien tenemos que $\frac{64(64+1)}{2} = 2080$, así que el último número en la Fila 64 es 2080.

Como 2020 está entre 2016 y 2080, entonces debe aparecer en algún lugar de la Fila 64.

De forma alternativa, para obtener la fila en la que está el 2020 podemos usar la fórmula cuadrática para encontrar n, resolviendo la ecuación $\frac{n(n+1)}{2} = 2020$.

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} &= 2020 \\
n(n+1) &= 4040 \\
n^2 + n - 4040 &= 0 \\
n &\approx 63.1 \text{ (usando la fórmula cuadrática y que } n \geq 0)
\end{aligned}$$

Esto significa que el entero 2020 estará en la Fila 64.

Si nos fijamos en el arreglo original. El primer número en la Fila 6, que es 16, tiene cinco números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 6, que es 17, tiene cuatro números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.
Además, observemos que el primer número en la Fila 5, que es 11, tiene cuatro números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 5, que es 12, tiene tres números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.
El patrón que encontramos es que el primer número en la Fila n tiene $n-1$ números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila n tiene $n-2$ números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.

Por lo tanto, el primer número en la Fila 64, que es 2017, tendrá 63 números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 64, que es 2018, tendrá 62 números en la columna encima de él. El tercer número en la Fila 64, que es 2019, tendrá 61 números en la columna encima de él. El cuarto número en la Fila 64, que es 2020, tendrá 60 números en la columna encima de él.

Por lo tanto, hay 60 enteros positivos menores que 2020 en la columna que contiene al número 2020.

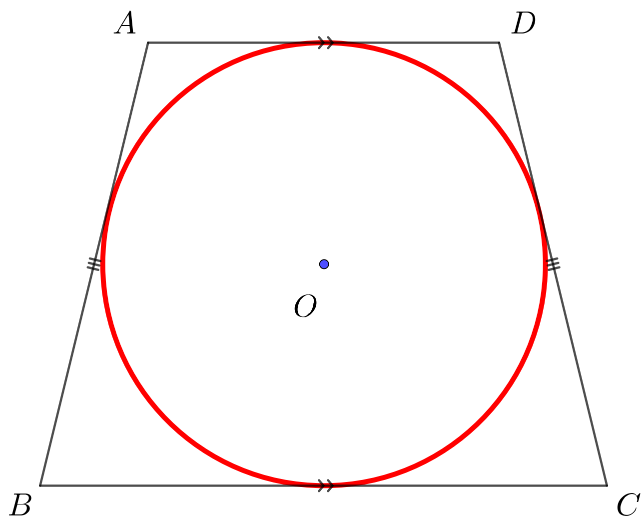
Problema de la Semana

Problema D

Construyendo Trapecios

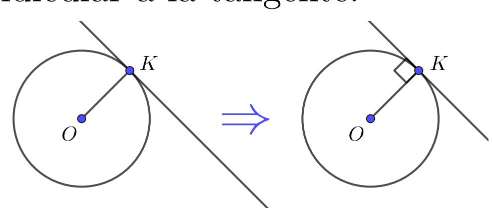
El cuadrilátero $ABCD$ está construido alrededor del círculo con centro O y radio 15 cm de forma que cada lado de $ABCD$ es tangente al círculo, los lados AD y BC son paralelos, y las longitudes de los lados AB y DC son iguales. $ABCD$ es conocido como trapecio isósceles.

Si el área de $ABCD$ es $1000\,\text{cm}^2$, determina las longitudes de los dos lados iguales, AB y DC.

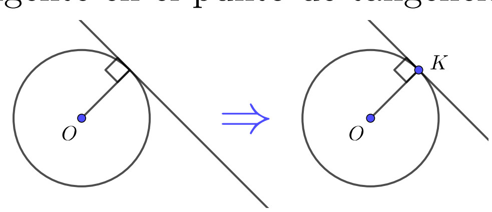


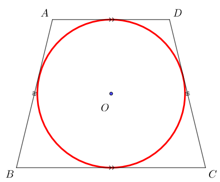
Para este problema, puedes utilizar sin demostración los siguientes dos resultados.

- Un segmento trazado desde el centro de un círculo, O, hasta un punto de tangencia, K, es perpendicular a la tangente.



- Un segmento trazado desde el centro de un círculo, O, perpendicular a la tangente, corta a la tangente en el punto de tangencia, K.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

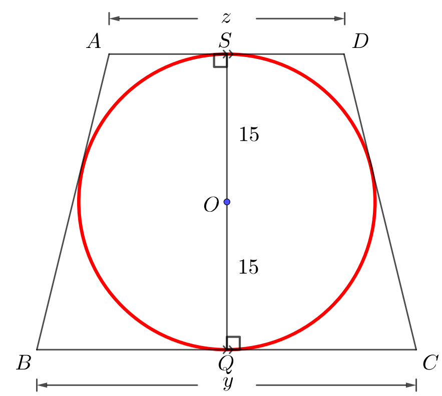
Construyendo Trapecios

Problema

El cuadrilátero $ABCD$ está construido alrededor del círculo con centro O y radio 15 cm de forma que cada lado de $ABCD$ es tangente al círculo, los lados AD y BC son paralelos, y las longitudes de los lados AB y DC son iguales. $ABCD$ es conocido como trapecio isósceles. Si el área de $ABCD$ es $1000\,\text{cm}^2$, determina las longitudes de los dos lados iguales, AB y DC.

Solución

Solución 1



Denotaremos por z a la longitud del lado AD y por y a la longitud del lado BC.

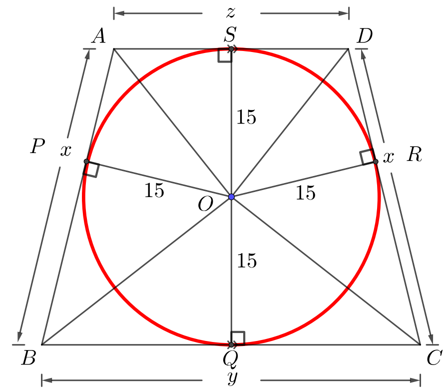
Tracemos un segmento que pase por O y que sea perpendicular a los lados AD y BC.

Usando el segundo resultado que está debajo del enunciado del problema, sabemos que esta perpendicular corta a AD en el punto de tangencia S y corta a BC en el punto de tangencia Q.

Tanto OS como OQ son radios del circulo. Como $SQ = OS + OQ$, se sigue que SQ es un diámetro del círculo que tiene longitud 30 cm. Como SQ es perpendicular a los dos lados paralelos del trapecio, podemos usar SQ como la altura del trapecio.

La formula del área para un trapecio nos dice que

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{SQ \times (AD + BC)}{2} \\
1000 &= \frac{30 \times (z + y)}{2} \\
1000 &= 15(z + y) \\
\frac{1000}{15} &= z + y \\
\frac{200}{3} &= z + y \qquad (1)
\end{aligned}$$



Denotemos por x a la longitud de los dos lados iguales, AB y DC.

Tracemos los segmentos que unen el centro O con cada uno de los vértices de $ABCD$, de forma que obtenemos cuatro triángulos, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, y $\triangle DOA$.

Tracemos los segmentos que unen el centro O con cada uno de los puntos de tangencia, P, Q, R, y S, en AB, BC, CD, y DA, respectivamente.

Cada uno de los segmentos es un radio, así que $OP = OQ = OR = OS = 15$. Gracias al primer resultado que se dio después del enunciado del problema, sabemos que cada uno de estos segmentos es perpendicular a la tangente por ese punto. Por lo tanto, cada uno de estos radios es una altura de su respectivo triángulo.

Ahora podemos encontrar el área del trapecio de otra forma, sumando las áreas de los cuatro triángulos:

$$\text{Área } \triangle AOB = OP \times AB \div 2 = \frac{15x}{2}, \quad \text{Área } \triangle BOC = OQ \times BC \div 2 = \frac{15y}{2}$$

$$\text{Área } \triangle COD = OR \times CD \div 2 = \frac{15x}{2} \quad \text{Área } \triangle DOA = OS \times AD \div 2 = \frac{15z}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Área } \triangle AOB + \text{Área } \triangle BOC + \text{Área } \triangle COD + \text{Área } \triangle DOA &= 1000 \\
\frac{15x}{2} + \frac{15y}{2} + \frac{15x}{2} + \frac{15z}{2} &= 1000 \\
15x + \frac{15y}{2} + \frac{15z}{2} &= 1000 \\
15x + \frac{15y + 15z}{2} &= 1000 \\
15x + \frac{15(y+z)}{2} &= 1000
\end{aligned}$$

Pero $y + z = \dfrac{200}{3}$ de (1) arriba, así que

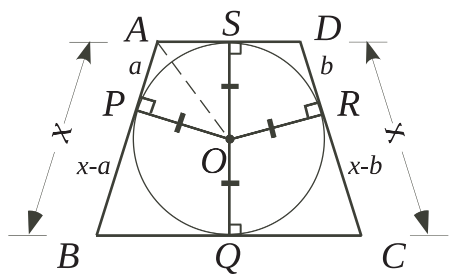
$$\begin{aligned}
15x + \frac{15(\frac{200}{3})}{2} &= 1000 \\
15x + 500 &= 1000 \\
15x &= 500 \\
x &= \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las longitudes de AB y DC son cada una $33\frac{1}{3}$ cm.

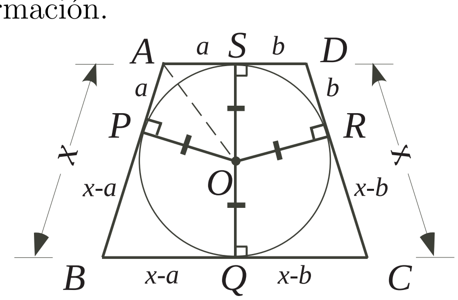
Solución 2

Sean P, Q, R y S los puntos de tangencia en AB, BC, CD y DA, respectivamente. Tracemos los segmentos OP, OQ, OR y OS. Entonces sabemos que $OP = OQ = OR = OS = 15$ porque todos son radios del círculo. Además, como cualquier línea trazada desde el centro del círculo hasta un punto de tangencia es perpendicular a la tangente, obtenemos que $\angle OPA = \angle OQB = \angle ORD = \angle OSA = 90°$.

Sea $AP = a$, $DR = b$ y sea x la longitud de los dos lados iguales. Por lo tanto, $PB = x - a$ y $RC = x - b$. El siguiente diagrama muestra lo que hemos mencionado.



Unamos A con O formando dos triángulos rectángulos, $\triangle APO$ y $\triangle ASO$. Usando el Teorema de Pitágoras, $AP^2 = AO^2 - OP^2$ y $AS^2 = AO^2 - OS^2$. Pero $OP = OS$ ya que ambos son radios. Así que las dos expresiones son iguales y obtenemos $AS = AP = a$.
Usando exactamente el mismo razonamiento que usamos para obtener $AP = AS = a$, podemos demostrar que $DR = DS = b$, $BP = BQ = x - a$ y $CR = CQ = x - b$. En el siguiente diagrama agregamos esta información.



Podemos usar la fórmula del área para trapecios. Al igual que en la Solución 1, podemos demostrar que $SQ = SO + OQ$ es una altura del trapecio. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\text{Área Trapezoid } ABCD &= SQ \times (AD + BC) \div 2 \\
1000 &= (SO + OQ) \times ((AS + SD) + (BQ + QC)) \div 2 \\
1000 &= (15 + 15) \times ((a + b) + (x - a + x - b)) \div 2 \\
1000 &= (30) \times (2x) \div 2 \\
1000 &= 30x \\
\frac{100}{3} &= x
\end{aligned}
$$

Así que podemos concluir que la longitud de $AB = DC$ es $33\frac{1}{3}$ cm.

Al final del enunciado del problema, dos resultados sin prueba fueron dados. Como extensión de este problema, puedes intentar demostrar estos dos resultados.

Problema de la Semana

Problema D

¡Un musical matemático!

Los alumnos de primer y último año de la Preparatoria Villa Matemática, presentarán un gran musical llamado “Matemáticas, ¿para qué son buenas?”. Un gran número de alumnos vino a una junta informativa. Después de una pequeña introducción al musical, 15 alumnos de último año decidieron que no era para ellos y se fueron. En ese momento, quedaron el doble de alumnos de primer año que de último año.

Más tarde, después de que se fueron los 15 alumnos de último año, también se fueron $\frac{3}{4}$ de los alumnos de primer año y $\frac{1}{3}$ de los alumnos de último año que quedaban. Esto hizo que quedaran 8 alumnos de último año más que alumnos de primer año. Todos los alumnos que quedaron se juntaron y crearon un musical impresionante.

¿Cuántos alumnos se quedaron a presentar el musical, “Matemáticas, ¿para qué son buenas?”

Matemáticas ¿para qué son buenas?

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¡Un musical matemático!

Problema

Los alumnos de primer y último año de la Preparatoria Villa Matemática, presentarán un gran musical llamado "Matemáticas, ¿para qué son buenas?". Un gran número de alumnos vino a una junta informativa. Después de una pequeña introducción al musical, 15 alumnos de último año decidieron que no era para ellos y se fueron. En ese momento, quedaron el doble de alumnos de primer año que de último año. Más tarde, después de que se fueron los 15 alumnos de último año, también se fueron $\frac{3}{4}$ de los alumnos de primer año y $\frac{1}{3}$ de los alumnos de último año que quedaban. Esto hizo que quedaran 8 alumnos de último año más que alumnos de primer año. Todos los alumnos que quedaron se juntaron y crearon un musical impresionante. ¿Cuántos alumnos se quedaron a presentar el musical, "Matemáticas, ¿para qué son buenas"?

Solución

Representaremos por j a la cantidad de alumnos de primer año y por s a la cantidad de alumnos de último año que fueron a la junta informativa.

Luego de que 15 alumnos de último año se fueron, quedaron $(s - 15)$ en la junta. En este momento la cantidad de alumnos de primer año es el doble, así que $j = 2(s - 15)$, y simplificando obtenemos $j = 2s - 30$. (1)

Luego, se fueron $\frac{3}{4}$ de la cantidad de alumnos de primer año, lo cual deja a $\frac{1}{4}$ de ellos, es decir $\frac{1}{4}j$.
Además, $\frac{1}{3}$ de los alumnos de último año se van, que significa que se quedan $\frac{2}{3}$ de ellos, es decir $\frac{2}{3}(s - 15)$.
Ahora, hay 8 alumnos más de último año que de primer año, es decir $\frac{2}{3}(s - 15) = \frac{1}{4}j + 8$.
Multiplicando por 12 y simplificando obtenemos $8(s - 15) = 3j + 96$. Esto se puede escribir como $8s - 120 = 3j + 96$. (2)

En este momento, podemos usar sustitición o eliminación para resolver el sistema de ecuaciones. En este caso, sustituímos el valor de j que obtuvimos en (1) en la ecuación (2) para encontrar s.

$$\begin{aligned}
8s - 120 &= 3(2s - 30) + 96 \\
8s - 120 &= 6s - 90 + 96 \\
2s &= 126 \\
s &= 63
\end{aligned}$$

Si sustituimos $s = 63$ en (1), obtenemos que $j = 2(63) - 30 = 126 - 30 = 96$.

En conclusión:

La cantidad original de alumnos es $j + s = 96 + 63 = 159$.

La cantidad de alumnos de primer año que quedan es $\frac{1}{4}j = \frac{1}{4}(96) = 24$.

La cantidad de alumnos de último año que quedan es $\frac{2}{3}(s - 15) = \frac{2}{3}(63 - 15) = \frac{2}{3}(48) = 32$.

La cantidad total de alumnos que se quedaron a realizar el musical es $24 + 32 = 56$.

La producción final fue impresionante, aún cuando sólo se quedaron 56 de los 159 alumnos que iniciaron.

Problema de la Semana

Problema D

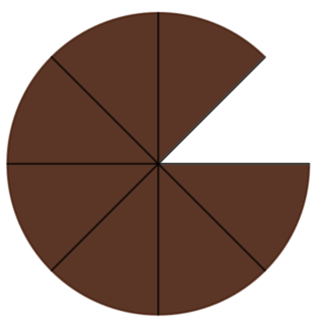
Mmmm... Pastel de Chocolate.

Para el cumpleaños de Amanda, Rhett preparó un delicioso pastel cilíndrico de chocolate. El radio y la altura de su pastel eran de la misma longitud. Rhett cortó el pastel en 8 rebanadas congruentes y se comió la primera rebanada para comprobar la calidad del pastel.

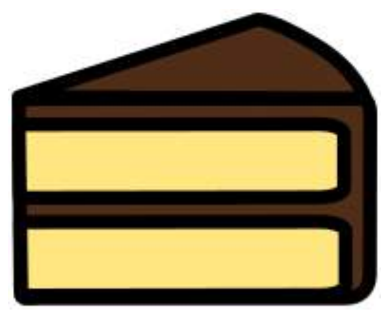
Luego, Rhett le preguntó a Amanda lo siguiente:

a) Después de quitar mi rebanada, ¿ha aumentado o disminuido la superficie total (teniendo en cuenta arriba, abajo y lados expuestos) de lo que queda del pastel?

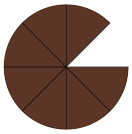
b) ¿En qué porcentaje, redondeado a decimales, la superficie aumentó o disminiyó?



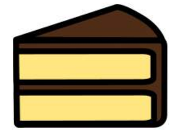
Vista superior del pastel sin la rebanada de Rhett



Rebanada que se comió Rhett.



Problema de la Semana
Problema D y Solución
Mmmm... Pastel de Chocolate.



Problema

Para el cumpleaños de Amanda, Rhett preparó un delicioso pastel cilíndrico de chocolate. El radio y la altura del pastel eran de la misma longitud. Rhett cortó el pastel en 8 rebanadas congruentes y se comió la primera rebanada para comprobar la calidad del pastel. Al quitar la rebanada, ¿ha aumentado o disminuido la superficie total de lo que queda del pastel? ¿En qué porcentaje, redondeado a decimales, la superficie aumentó o disminiyó?

Solución

En la Figura 1 podemos observar un diagrama con las 3 partes que conforman el total de la superficie del pastel.

La superficie total incluye las áreas de dos círculos de radio r y un rectángulo cuyo largo es igual a la longitud de la circunferencia, y cuyo ancho mide la altura del pastel, $h = r$.

$$\begin{aligned}\text{Superficie Total} &= 2\left(\pi r^2\right) + (2\pi r)(r), \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r^2, \\ &= 4\pi r^2.\end{aligned}$$

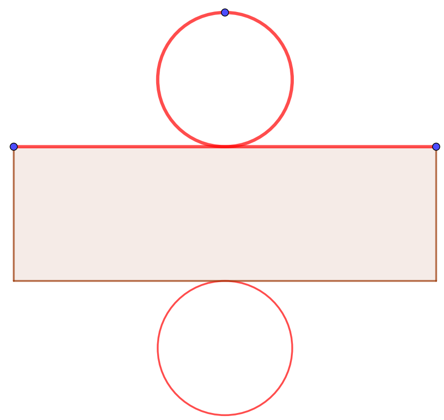


Fig. 1

Ahora, observa la Figura 2. Esta muestra las 3 partes que se quitaron de la superficie total.

La superficie que se quitó incluye $\frac{1}{8}$ del área de cada uno de los círculos de radio r y un rectángulo cuya área es $\frac{1}{8}$ del área del rectángulo original. Por lo tanto, la superficie removida es $\frac{1}{8}$ del total de la superficie.

$$\begin{aligned}\text{Superficie Removida} &= \frac{1}{8}\left(4\pi r^2\right), \\ &= \frac{1}{2}\pi r^2.\end{aligned}$$

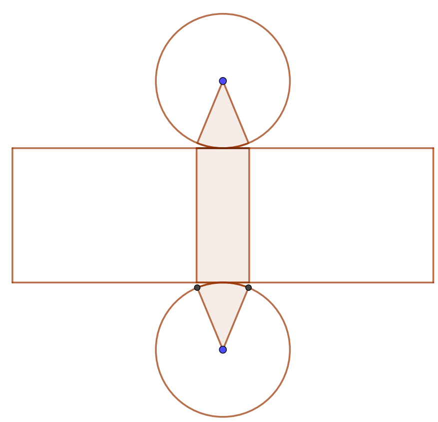


Fig. 2

Pero hay dos áreas que se agregan al remover el pastel.

A la derecha (Fig. 3) se muestra un diagrama con las 2 partes que se agregaron a la superficie total.

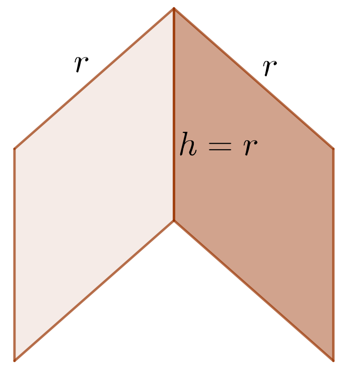


Fig. 3

La superficie añadida incluye 2 rectángulos, cada uno de largo r y ancho $h = r$.

$$\begin{aligned}\text{Superficie Agregada} &= 2(r)(r), \\ &= 2r^2.\end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular la nueva superficie total.

$$\begin{aligned}\text{Superficie} &= \text{Superficie Original} - \text{Superficie Removida} + \text{Superficie Agregada}, \\ &= 4\pi r^2 - \frac{1}{2}\left(\pi r^2\right) + 2r^2, \\ &= 4\pi r^2 + r^2\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right).\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}\pi < 2$, entonces $-\frac{1}{2}\pi + 2 > 0$, y entonces la superficie aumenta cuando quitamos la rebanada.

Para calcular qué porcentaje ha aumentado la superficie, dividimos el incremento entre el área original. El incremento es $r^2\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right)$.

$$\begin{aligned}\text{Porcentaje de la superficie incrementado} &= \frac{r^2\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right)}{4\pi r^2} \times 100\% \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\pi + 2\right)}{4\pi} \times 100\%, \\ &= \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}\right) \times 100\%, \\ &= \left(\frac{-\pi + 4}{8\pi}\right) \times 100\%, \\ &\approx 3.4\%.\end{aligned}$$

La superficie del pastel se incrementa approximadamente 3.4% después de quitar la rebanada.

Problema de la Semana

Problema D

¡No te quedes sin dígitos!

Inicialmente tienes 100 copias de cada dígito del 0 al 9. Es decir, tienes una pila con 1000 dígitos en total. La siguiente tabla muestra el número de copias de cada dígito.

Dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
# Restantes	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Empezando desde el 1, recita los números positivos de uno en uno. Cada vez que digas un número, remueve los dígitos que forman ese número de tu pila de dígitos.

Por ejemplo, después de haber recitado los números del 1 al 13, la tabla debería verse así :

Dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
# Restantes	99	94	98	98	99	99	99	99	99	99

¿Cual es el número mas grande que puedes decir sin que se te acaben los dígitos de tu pila necesarios para recitar el número?

0 1 2 3 4

5 6 7 8 9

0 1 2 3 4
5 6 7 8 9

Problema de la Semana

Problema D y Solución

¡No te quedes sin dígitos!

Problema

Inicialmente tienes 100 copias de cada dígito del 0 al 9. Es decir, tienes una pila con 1000 dígitos en total.
Empezando desde el 1, recita los números positivos de uno en uno. Cada vez que digas un número, remueve los dígitos que forman ese número de tu pila de dígitos.
¿Cual es el número mas grande que puedes decir sin que se te acaben los dígitos de tu pila necesarios para recitar el número?

Solución

Para los números enteros del 1 al 99, cada dígito distinto de cero, será usado la misma cantidad de veces. El cero se usará 9 veces menos que cualquier otro dígito. En cuanto lleguemos al número 100. Los 1s se utilizarán más seguido. Así que mejor contaremos sólo el número de 1s hasta que se nos acaben.

Del 1 al 99, utilizamos un 1 como el dígito de las unidades 10 veces: $\{1, 11, 21, \cdots, 91\}$. Hay 10 números que tienen al 1 en el dígito de las decenas: $\{10, 11, 12, \cdots, 18, 19\}$. Por lo tanto, para cuando lleguemos al 99, habremos usado $10 + 10 = 20$ unos.

Del 100 al 109, usamos 10 unos en las centenas más otro del número 101. Esto es en total 11 unos más, así que ahora hemos usado $20 + 11 = 31$ unos.

Del 110 al 119 usamos 10 unos para las centenas, 10 unos para las decenas y 1 uno para las unidades en 111. Esto es en total 21 unos más, así que ahora hemos usado $31 + 21 = 52$ unos.

Del 120 al 129, del 130 al 139, del 140 al 149, y del 150 al 159 usamos la misma cantidad de unos que los que usamos al contar del 100 al 109. Entonces, para contar del 120 al 159 utilizamos $11 + 11 + 11 + 11 = 44$ unos, y ahora hemos utilizado un total de $52 + 44 = 96$ unos.

Ahora podemos contar hasta que utilicemos 4 unos restantes: 160, 161 y 162.

Cuando intentamos contar 163, ya no quedan unos.

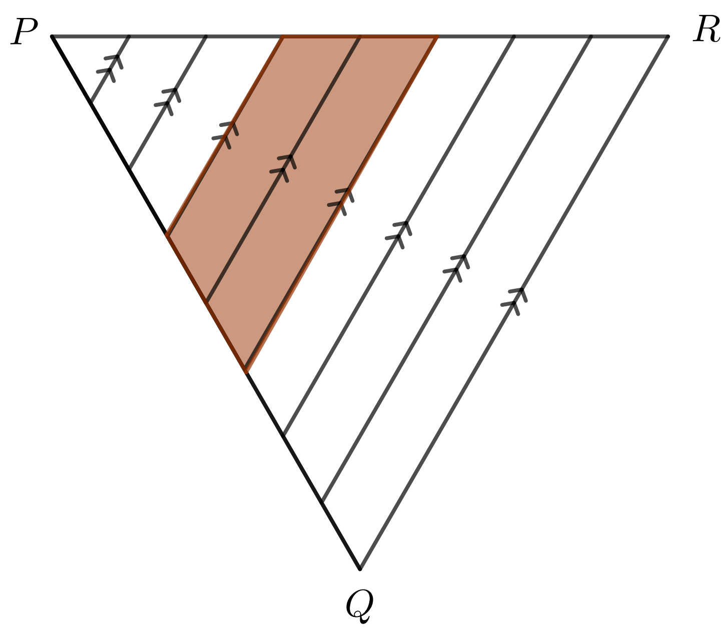
Por lo tanto, el mayor número que podemos decir, de tal manera que no se nos acaben los dígitos necesarios para recitar, es 162.

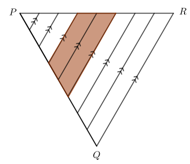
Problema de la Semana

Problema D

Un área sombría

El $\triangle PQR$, es un triángulo equilatero con lados de longitud de 32 cm. Tomamos dos lados, PR y PQ, y los dividimos en 8 segmentos del mismo tamaño. Cada punto de división en PR lo conectamos con su correspondiente punto de división en PQ, trazando 7 segmentos como se muestra en la figura. Cada uno de los nuevos segmentos es paralelo a QR, el tercer lado del triángulo. ¿Cuál es el área del trapecio sombreado?





Problema de la Semana

Problema D y Solución

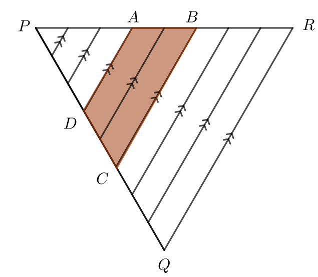
Un área sombría

Problema

El $\triangle PQR$, es un triángulo equilatero con lados de longitud de 32 cm. Tomamos dos lados, PR y PQ, y los dividimos en 8 segmentos del mismo tamaño. Cada punto de división en PR lo conectamos con su correspondiente punto de división en PQ, trazando 7 segmentos como se muestra en la figura. Cada uno de los nuevos segmentos es paralelo a QR, el tercer lado del triángulo. ¿Cuál es el área del trapecio sombreado?

Solución

Solución 1:



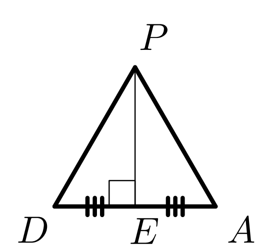
Denotemos los vértices del trapecio por A, B, C y D, como se muestra en la figura. En esta solución restaremos el área de $\triangle PDA$ del área de $\triangle PCB$ para obtener el área del trapecio $ABCD$.

Cada uno de los lados PR y PQ están divididos en 8 segmentos iguales de longitud $32 \div 8 = 4$ cm. PD y PA están cada uno formado por 3 de estos segmentos iguales, y PC y PB están cada uno formado por 5 de estos segmentos iguales. Por lo tanto, $PD = PA = 12$ cm y $PC = PB = 20$ cm.

Primero demostraremos que $\triangle PDA$ y $\triangle PCB$ son triángulos equiláteros.
Como $\triangle PQR$ es equilátero, $\angle PRQ = \angle PQR = \angle QPR = 60°$. Como $\angle DPA$, $\angle CPB$ y $\angle QPR$ son el mismo ángulo, $\angle DPA = \angle CPD = \angle QPR = 60°$.

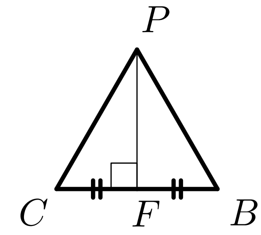
Como $DA \parallel CB \parallel QR$, entonces $\angle PDA = \angle PCB = \angle PQR = 60°$ y $\angle PAD = \angle PBC = \angle PRQ = 60°$.

Todos los ángulos internos de $\triangle PDA$ y $\triangle PCB$ miden 60°. Por lo tanto, ambos triángulos son equiláteros. $\triangle PDA$ tiene lados de longitud 12 cm y $\triangle PBC$ tiene lados de longitud 20 cm.



En $\triangle PDA$, trazamos la altura desde P al lado DA, y denotamos por E al pie de la perpendicular. Como $\triangle PDA$ es un triángulo equilátero, E es el punto medio de DA y se sigue que $DE = \frac{1}{2}DA = 6$ cm. Utilizando el Teorema de Pitágoras,
$PE^2 = PD^2 - DE^2 = 12^2 - 6^2 = 108$ y $DE = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$ cm (ya que $DE \geq 0$).

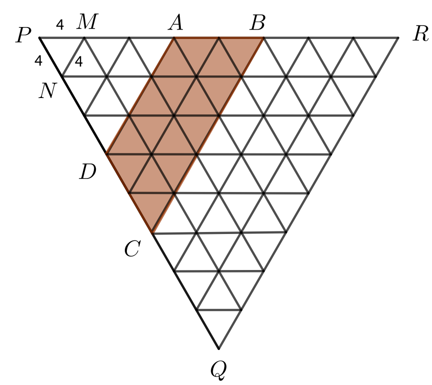
El área de $\triangle PDA = \frac{(PE)(DA)}{2} = \frac{(6\sqrt{3})(12)}{2} = 36\sqrt{3}$ cm^2.



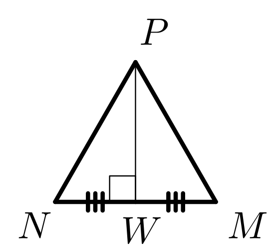
En $\triangle PCB$, trazamos la altura desde P al lado CB, y denotamos por F al pie de la perpendicular. Como $\triangle PCB$ es un triángulo equilátero, F es el punto medio de CB y se sigue que $CF = \frac{1}{2}CB = 10$ cm. Utilizando el Teorema de Pitágoras,
$PF^2 = PC^2 - CF^2 = 20^2 - 10^2 = 300$ y $PF = \sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}$ cm (ya que $PF \geq 0$).
El área de $\triangle PCB = \frac{(PF)(CB)}{2} = \frac{(10\sqrt{3})(20)}{2} = 100\sqrt{3}$ cm^2.
El área del trapecio $ABCD =$ área $\triangle PCB -$ área $\triangle PDA = 100\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ cm^2.

(Observa que también pudimos obtener las longitudes de PE y PF dándonos cuenta que $\triangle PDE$ y $\triangle PCF$ son triángulos $30°$- $60°$- $90°$ cuyos lados están en proporción $1 : \sqrt{3} : 2$).

Solución 2:



Como se muestra en el diagrama de la derecha, podemos triangular $\triangle PQR$ donde el triángulo equilatero de arriba a la izquierda tiene lados de longitud 4 cm. En el primer trapecio de la izquierda caben 3 triángulos equilateros, en el segundo trapecio de la izquierda caben 5 triángulos equilateros, en el tercer trapecio de la izquierda caben 7 triángulos equilateros, en el cuarto trapecio de la izquierda caben 9 triángulos equilateros, y así sucesivamente. La región sombreada contiene 16 triángulos equiláteros, cada uno con lados de longitud 4 cm. Para obtener el área de la región, primero obtendremos el área de un triángulo equilátero de lado 4 cm, y luego multiplicaremos el resultado por 16.



Denotemos por $\triangle PNM$ al pequeño triángulo equilátero. En $\triangle PNM$, trazamos la altura desde P al lado NM, y denotamos por W al pie de la perpendicular. Como $\triangle PNM$ es un triángulo equilátero, W es el punto medio de NM y se sigue que
$NW = \frac{1}{2}NM = 2$ cm.
Utilizando el Teorema de Pitágoras, $PW^2 = PN^2 - NW^2 = 4^2 - 2^2 = 12$ y $PW = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ cm (ya que $PW \geq 0$).
El área de $\triangle PNM = \frac{(PW)(NM)}{2} = \frac{(2\sqrt{3})(4)}{2} = 4\sqrt{3}$ cm^2.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $16 \times 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ cm^2.

(Observa que también pudimos obtener las longitud de PW dándonos cuenta que $\triangle PNW$ es un triángulo $30°$- $60°$- $90°$ y por lo tanto sus lados están en proporción $1 : \sqrt{3} : 2$).

Problema de la Semana

Problema D

Contando luces en vez de ovejas.

Algunas noches es complicado para John conciliar el sueño. Una de esas noches, en vez de contar ovejas, John decidió contar el número de LEDs (siglas en inglés de: diodo emisor de luz) que mostraba su reloj digital de mesa entre las 10:00 PM y las 12:59 AM. Por ejemplo, a las 11:11 PM, Jhon observó que 8 de los LEDs estaban encendidos.

Durante el tiempo en que John estuvo despierto (de 10:00 PM a 12:59 AM), ¿cuántas veces John vió exactamente 20 de los LEDs encendidos?

A continuación, puedes encontrar algo de información sobre el reloj de John:

- El reloj sólo marca la hora desde las 12:00 AM hasta las 11:59 PM.
- Cada dígito es formado usando siete LEDs. Estos están encendidos o apagados dependiendo del dígito que se está mostrando. Por ejemplo, para el dígito 2 se encienden cinco de los siete LEDs, mientras que para el 8 se encienden los siete LEDs. Todos los dígitos se muestran en el diagrama de abajo.
- Para marcar horas entre las 10:00 AM/PM y las 12:59 AM/PM se usan cuatro dígitos.
- Para marcar horas entre la 1:00 AM/PM y las 9:59 AM/PM, sólo se usan tres dígitos. Los LEDs del dígito mas a la izquierda se mantienen completamente apagados.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Contando luces en vez de ovejas.

Problema

Algunas noches es complicado para John conciliar el sueño. Una de esas noches, en vez de contar ovejas, John decidió contar el número de LEDs (siglas en inglés de: diodo emisor de luz) que mostraba su reloj digital de mesa entre las 10:00 PM y las 12:59 AM. Por ejemplo, a las 11:11 PM, Jhon observó que 8 de los LEDs estaban encendidos. Durante el tiempo en que John estuvo despierto (de 10:00 PM a 12:59 AM), ¿cuántas veces John vió exactamente 20 de los LEDs encendidos?

Solución

Primero, creamos una tabla que muestre el número de LEDs que se encienden para mostrar cada dígito.

Dígito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
# de LEDs encendidos	2	5	5	4	5	6	3	7	6	6

Como John está despierto de 10:00 PM a 12:59 AM, el dígito de la izquierda siempre es el 1. Como el reloj usa exactamente dos de los LEDs para mostrar el digito 1, los tres dígitos restantes deben usar exactamente 18 LEDs. El segundo dígito solo puede ser 0, 1 o 2. Dividiremos nuestro análisis en estos tres casos.

1. Entre las 10:00 PM y las 10:59 PM

   Los primeros dos dígitos son 10, los cuales usan $2 + 6 = 8$ LEDs. Los últimos dos dígitos deben formar un número entre 00 y 59, inclusive, tal que entre ambos dígitos se usen $20 - 8 = 12$ LEDs. Usando la tabla de arriba, podemos formar combinaciones válidas de dígitos, de forma que 12 LEDs estén encendidos. Para hacer esto, podemos tomar dos dígitos que usen 6 LEDs cada uno, o podemos tomar un dígito que use 5 LEDs y otro que use 7 LEDs. La combinación de dígitos debe marcar un tiempo válido, así que cuando usemos el 8, sólo lo podemos poner al final del número. Las únicas combinaciones válidas son 00, 06, 09, 28, 38, y 58. Por lo tanto, a las 10:00, 10:06, 10:09, 10:28, 10:38, y 10:58 hay 20 LEDs encendidos.

2. Entre 11:00 PM y las 11:59 PM

   Los primeros dos dígitos son el 1, los cuales usan $2 + 2 = 4$ LEDs. Los últimos dos dígitos deben usar 16 LEDs en total. Cada dígito puede usar un máximo de 7 LEDs, así que no es posible que los últimos dos dígitos usen 16 LEDs. Por lo tanto, entre las 11:00 PM y 11:59 PM nunca hay exactamente 20 LEDs encendidos.

3. Tiempos entre 12:00 y 12:59

   Los primeros dos dígitos son 1 y 2, los cuales usan $2 + 5 = 7$ LEDs. Los últimos dos dígitos deben usar 13 LEDs en total. La única forma de que esto suceda es si un dígito usa 6 LEDs y el otro usa 7 LEDs. El único dígito que usa 7 LEDs es el 8. Si hay un tiempo válido entre 12:00 y 12:59, el último dígito debe ser 8. Entonces, las únicas opciones para el tercer dígito son 6, 9 y 0. De estas tres opciones, sólo 0 se puede usar para formar una hora válida. Por lo tanto, el único instante entre las 12:00 AM y las 12:59 AM en el que hay 20 LEDs encendidos es a las 12:08 AM.

Combinando los tres casos, hay un total de $6 + 0 + 1 = 7$ veces en las que exactamente 20 de los LEDs están encendidos. Esto sucede a las 10:00 PM, 10:06 PM, 10:09 PM, 10:28 PM, 10:38 PM, 10:58 PM y 12:08 AM.

Para pensar:

Ignorando AM y PM, ¿cuántas veces entre 1:00 y 9:59 se usan exactamente 20 LEDs para marcar la hora? La respuesta puede sorprenderte.

Problema de la Semana

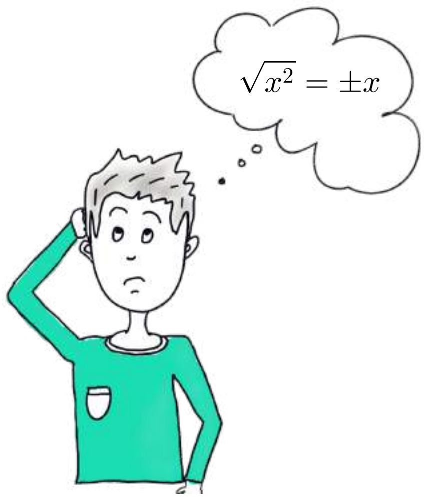
Problema D

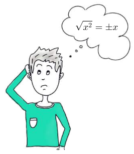
¿Cuál es el total?

Sabemos que los números a, b y c cumplen las siguientes ecuaciones:

$$(a+b)^2 = 9,\ (b+c)^2 = 25,\ \text{y}\ (a+c)^2 = 81.$$

Si $a+b+c \geq 1$, determina la **cantidad** de posibles valores que puede tener $a+b+c$.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuál es el total?

Problema
Sabemos que los números a, b y c cumplen las siguientes ecuaciones:

$$(a+b)^2 = 9,\ (b+c)^2 = 25, \text{ and } (a+c)^2 = 81.$$

Si $a+b+c \geq 1$, determina la **cantidad** de posibles valores que puede tener $a+b+c$.

Solución

Primero, removamos las potencias de las ecuaciones. La ecuación $(a+b)^2 = 9$ implica que $a+b = \pm 3$. Similarmente, la ecuación $(b+c)^2 = 25$ implica $b+c = \pm 5$. Y finalmente como $(a+c)^2 = 81$, entonces $a+c = \pm 9$.

La clave de la solución esta en observar que

$$(a+b)+(b+c)+(a+c) = 2a+2b+2c = 2(a+b+c).$$

Este número es el doble del valor que estamos buscando.

La siguiente tabla muestra un resumen de todas las posibles combinaciones de valores de $a+b$, $b+c$ y $a+c$, así como los valores que se obtienen para $2a+2b+2c$ y $a+b+c$. La última columna nos dice si es cierto o no que el valor de $a+b+c$ es ≥ 1.

$a+b$	$b+c$	$a+c$	$2a+2b+2c$	$a+b+c$	$a+b+c \geq 1$? (sí / no)
3	5	9	17	8.5	sí
3	5	-9	-1	-0.5	no
3	-5	9	7	3.5	sí
3	-5	-9	-11	-5.5	no
-3	5	9	11	5.5	sí
-3	5	-9	-7	-3.5	no
-3	-5	9	1	0.5	no
-3	-5	-9	-17	-8.5	no

Por lo tanto, hay tres posibles valores de $a+b+c$ tales que $a+b+c \geq 1$.

Nota que adicionalmente, para cada una de las tres posibilidades, podemos determinar los valores de a, b y c que producen cada valor.

Problema de la Semana

Problema D

Cuida tus Ps, Qs y Rs

Las letras P, Q y R representan dígitos que se han usado para formar los números PQR, QQP y PQQ, de forma que:

$$PQR + 2 = PQQ$$

y

$$PQR \times 2 = QQP$$

Determina todas las posibles combinaciones de valores para P, Q y R que satisfacen las dos ecuaciones.

Problema de la Semana

Problema D y Solución
Cuida tus Ps, Qs y Rs

Problema

Las letras P, Q, y R representan dígitos. Determina todas las posibles combinaciones de valores de P, Q y R, que cumplen: $PQR + 2 = PQQ$ y $PQR \times 2 = QQP$

Solución

De la equación $PQR + 2 = PQQ$, observamos que el número PQQ es 2 unidades más grande que PQR y que los dos primeros dígitos de cada número son iguales. Esto implica que $Q = R + 2$. En efecto, sabemos que $PQR = 100 \times P + 10 \times Q + R = 100P + 10Q + R$ y además que $PQQ = 100 \times P + 10 \times Q + Q = 100P + 10Q + Q$.
Entonces,

$$\begin{aligned}(100P + 10Q + R) + 2 &= 100P + 10Q + Q\\ 100P + 10Q + R + 2 &= 100P + 11Q\\ R + 2 &= Q, \text{ como dijimos.}\end{aligned}$$

De esta expresión podemos obtener una restricción en los posibles valores de R. R debe ser un entero entre 0 y 7, incluyéndolos. Si $R = 8$, entonces $R = Q + 2 = 10$ y Q no sería un dígito.

A partir de aquí, mostraremos dos posibles soluciones.

Solución 1

Si escribimos a $PQR \times 2 = QQP$ en notación decimal, obtenemos:

$$\begin{aligned}(100P + 10Q + R) \times 2 &= 100Q + 10Q + P\\ 200P + 20Q + 2R &= 110Q + P\\ 199P &= 90Q - 2R\\ \text{Sustituyendo } R + 2 \text{ en lugar de } Q: \quad 199P &= 90(R + 2) - 2R\\ 199P &= 90R + 180 - 2R\\ P &= \frac{88R + 180}{199}\end{aligned}$$

Debemos entoces buscar un valor para R, entre 0 y 7, de forma que $88R + 180$ es múltiplo de 199. Usando prueba y error, podemos ver que el único valor de R que satisface esto es $R = 7$. Entonces, $P = \frac{88R+180}{199} = \frac{88(7)+180}{199} = 4$ y $Q = R + 2 = 9$.

Por lo tanto, los únicos valores que satisfacen el sistema de ecuaciones son $P = 4$, $Q = 9$ y $R = 7$.

Podemos verificar este resultado:

$$PQR + 2 = 497 + 2 = 499 = PQQ \text{ y}$$

$$PQR \times 2 = 497 \times 2 = 994 = QQP.$$

Solución 2

Si R esta entre 0 y 7, entonces $Q = R + 2$ esta entre 2 y 9. De la segunda ecuación, también sabemos que P debe ser el dígito de las unidades del número $2 \times R$.
Ahora podemos usar una tabla para determinar todos los posibles valores de P, Q, y R:

Q	R	$2 \times R$	P	PQR	QQP	¿Se cumple $2 \times PQR = QQP$?
2	0	0	0	020	220	No
3	1	2	2	231	332	No
4	2	4	4	442	444	No
5	3	6	6	653	556	No
6	4	8	8	864	668	No
7	5	10	0	075	770	No
8	6	12	2	286	882	No
9	7	14	4	497	994	Sí

Ahora tenemos que verificar que la última fila tambien cumple con la ecuación
$PQR + 2 = PQQ$.

$$PQR + 2 = 497 + 2 = 499 = PQQ.$$

Por lo tanto, los únicos valores que satisfacen el sistema de ecuaciones son $P = 4$, $Q = 9$ y $R = 7$.

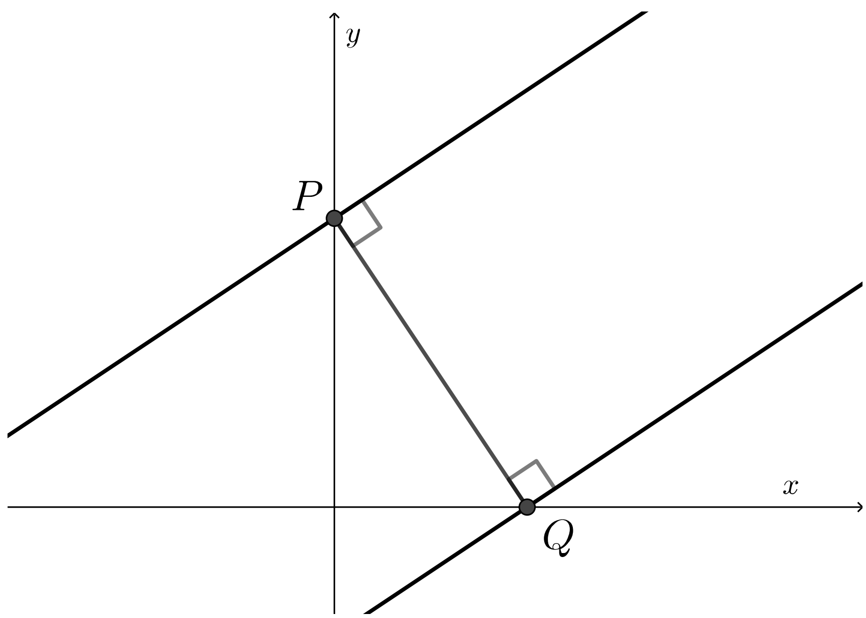
Problema de la Semana

Problema D

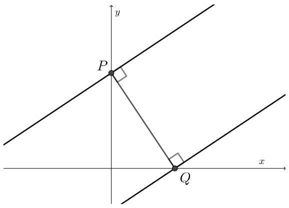
Hallando puntos de intersección

Se ha dibujado un par de líneas rectas en el plano (como se ilustra en la figura). La primera línea corta el eje y en el punto P, la segunda línea corta el eje x en el punto Q de tal forma que el segmento PQ es perpendicular a ambas líneas.

Si la equación de la línea que pasa por P es $y = mx + k$, determina el punto de corte con el eje y de la línea que pasa por Q en términos de m y k.



Sugerencia: Si encuentras el problema un poco difícil al inicio, considera resolverlo primero con un ejemplo específico de una línea que pase por P, como $y = 4x + 3$, y después intenta resolver el problema en su forma general.



Problema de la Semana

Problema D y Solución

Hallando puntos de intersección

Problema

Se ha dibujado un par de líneas rectas en el plano (como se ilustra en la figura). La primera línea corta el eje y en el punto P, la segunda línea corta el eje x en el punto Q de tal forma que el segmento PQ es perpendicular a ambas líneas. Si la equación de la línea que pasa por P es $y = mx + k$, determina el punto de corte con el eje y de la línea que pasa por Q en términos de m y k.

Solución

Para ayudarnos con notación, llamaremos a la primera línea l_1 y a la segunda l_2. Adicionalmente, llamemos l_3 a la recta que pasa por P y Q.

Como la ecuación de l_1 es $y = mx + k$, sabemos que la pendiente de l_1 es m y que su corte con el eje y es el punto $(0, k)$. Así que P es el punto $(0, k)$.

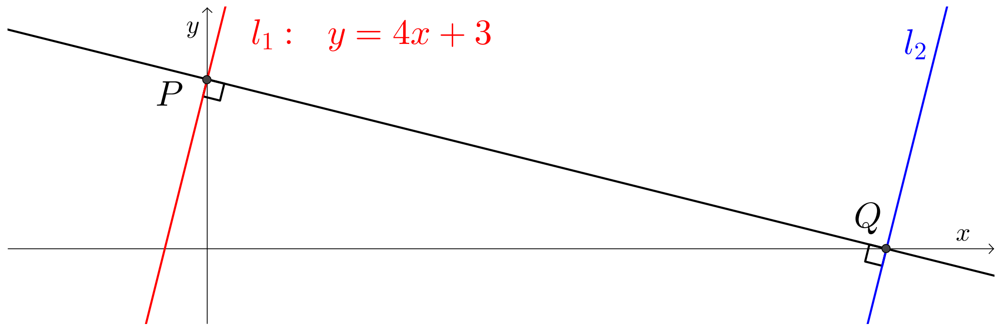
Ahora, como el segmento PQ es perpendicular a l_1, entonces la pendiente de la recta l_3 es igual a menos el recíproco de la pendiente de l_1, es decir, es igual a $-\frac{1}{m}$. También, el intercepto de la línea l_3 con el eje y es P, así que la ecuación de l_3 es $y = -\frac{1}{m}x + k$.

El intercepto de la línea l_3 con el eje x es Q. Este intercepto se puede hallar reemplazando $y = 0$ en la equación $y = -\frac{1}{m}x + k$ y despejando x. Entonces, de $0 = -\frac{1}{m}x + k$ obtenemos que $\frac{1}{m}x = k$ y finalmente que $x = km$. De esto concluimos que Q es el punto $(mk, 0)$.

Como el segmento PQ también es perpendicular a la línea l_2, entonces l_1 y l_2 son paralelas y la pendiente de l_2 es igual a m. El intercepto de la línea l_2 con el eje x es $Q = (mk, 0)$. Supongamos que la ecuación de la línea l_2 es $y = mx + b$ para algún b. Si reemplazamos $x = mk$ en esta ecuación, obtenemos $y = (m)(mk) + b = 0$ y concluimos que $b = -m^2k$.

Finalmente, concluimos que la ecuación de la recta l_2 es $y = mx - m^2k$ y el intercepto de la línea l_2 con el eje y es el punto $(0, -m^2k)$.

Si resolviste el problema asumiendo que la ecuación de la recta l_1 era $4x + 3$, debiste obtener -48 como el intercepto de l_2 con el eje y. En la página siguiente te damos una solución a este problema particular.



Llama l_1 a la recta que pasa por P y l_2 a la recta que pasa por Q. Adicionalmente, llamemos l_3 a la recta que pasa por P y Q.

Como la ecuación de l_1 es $y = 4x + 3$, sabemos que la pendiente de l_1 es 4 y que su corte con el eje y es el punto $P = (0, 3)$.

Ahora, como el segmento PQ es perpendicular a l_1, entonces la pendiente de la recta l_3 es igual a menos el recíproco de la pendiente de l_1, es decir, es igual a $-\frac{1}{4}$. También, el intercepto de la línea l_3 con el eje y es P, así que la ecuación de l_3 es $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

El intercepto de la línea l_3 con el eje x es Q. Este intercepto se puede hallar reemplazando $y = 0$ en la equación $y = -\frac{1}{4}x + 3$ y despejando x. Entonces, de $0 = -\frac{1}{4}x + 3$ obtenemos que $\frac{1}{4}x = 3$ y finalmente que $x = 12$. De esto concluimos que Q es el punto $(12, 0)$.

Como el segmento PQ también es perpendicular a la línea l_2, entonces l_1 y l_2 son paralelas y la pendiente de l_2 es igual a 4. El intercepto de la línea l_2 con el eje x es $Q = (12, 0)$. Supongamos que la ecuación de la línea l_2 es $y = 4x + b$ para algún b. Si reemplazamos $x = 12$ en esta ecuación, obtenemos $y = (4)(12) + b = 0$ y concluimos que $b = -48$.

Finalmente, concluimos que la ecuación de la recta l_2 es $y = 4x - 48$ y el intercepto de la línea l_2 con el eje y es el punto $(0, -48)$.

Manejo de Datos (D)

VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

2020

Considera el siguiente arreglo de enteros positivos.

Fila 1	1					
Fila 2	2	3				
Fila 3	4	5	6			
Fila 4	7	8	9	10		
Fila 5	11	12	13	14	15	
Fila 6	16	17	18	19	20	21
$\vdots$						

Es posible continuar la lista con enteros positivos usando más filas y columnas, de tal forma que cada nueva fila contenga un entero más que la fila anterior.

¿Cuántos enteros menores que 2020 están en la *columna* que contiene al número 2020?

¿Sabías que la suma de los enteros positivos del 1 al n se puede determinar usando la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$? Es decir, $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Por ejemplo, la suma de los enteros $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(5)}{2} = 10$. Este resultado se puede verificar simplemente, sólo debemos sumar los 4 números. También se puede verificar facilmente, que la suma de los primeros 5 enteros positivos es $\frac{5(6)}{2} = 15$.

Esta fórmula puede ser útil para resolver este problema. Como ejercicio extra, puedes demostrar que esta fórmula se cumple para todo entero positivo n.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

2020

Problema
Considera el siguiente arreglo de enteros positivos.

Fila 1	1					
Fila 2	2	3				
Fila 3	4	5	6			
Fila 4	7	8	9	10		
Fila 5	11	12	13	14	15	
Fila 6	16	17	18	19	20	21
$\vdots$						

Es posible continuar la lista con enteros positivos usando más filas y columnas, de tal forma que cada nueva fila contenga un entero más que la fila anterior.

¿Cuántos enteros menores que 2020 están en la *columna* que contiene al número 2020?

Solución

Notemos que en el arreglo hay un número en la Fila 1, hay dos números en la Fila 2, tres números en la Fila 3, y así sucesivamente, hay n números en la Fila n.
Los números en las filas contienen a los enteros positivos en orden, empezando con el 1 en la Fila 1, y cada nueva fila contiene un entero más que la fila anterior. Entonces, el último número en cada fila es igual a la suma de la cantidad de números en cada fila de la tabla, hasta esa fila.

Por ejemplo, el último número en la Fila 4 es 10, que es igual a la suma de la cantidad de números en las filas 1, 2, 3 y 4. Pero la cantidad de números en cada fila es igual al número de la fila. Por lo tanto, 10 es igual a la suma 1 + 2 + 3 + 4.
Es decir, el último número de la Fila n es igual a

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Podemos encontrar en qué fila está el entero 2020, usando prueba y error de la siguiente manera.
Observemos que $\frac{63(63+1)}{2} = 2016$, entonces el último número en la Fila 63 es 2016.
Tambien tenemos que $\frac{64(64+1)}{2} = 2080$, así que el último número en la Fila 64 es 2080.

Como 2020 está entre 2016 y 2080, entonces debe aparecer en algún lugar de la Fila 64.

De forma alternativa, para obtener la fila en la que está el 2020 podemos usar la fórmula cuadrática para encontrar n, resolviendo la ecuación $\frac{n(n+1)}{2} = 2020$.

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} &= 2020 \\
n(n+1) &= 4040 \\
n^2 + n - 4040 &= 0 \\
n &\approx 63.1 \text{ (usando la fórmula cuadrática y que } n \geq 0)
\end{aligned}$$

Esto significa que el entero 2020 estará en la Fila 64.

Si nos fijamos en el arreglo original. El primer número en la Fila 6, que es 16, tiene cinco números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 6, que es 17, tiene cuatro números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.
Además, observemos que el primer número en la Fila 5, que es 11, tiene cuatro números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 5, que es 12, tiene tres números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.
El patrón que encontramos es que el primer número en la Fila n tiene $n-1$ números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila n tiene $n-2$ números en la columna encima de él. Para cualquier otro entero en esa fila, la cantidad de números en la columna encima de él es uno menos que la cantidad para el número anterior en la fila.

Por lo tanto, el primer número en la Fila 64, que es 2017, tendrá 63 números en la columna encima de él. El segundo número en la Fila 64, que es 2018, tendrá 62 números en la columna encima de él. El tercer número en la Fila 64, que es 2019, tendrá 61 números en la columna encima de él. El cuarto número en la Fila 64, que es 2020, tendrá 60 números en la columna encima de él.

Por lo tanto, hay 60 enteros positivos menores que 2020 en la columna que contiene al número 2020.

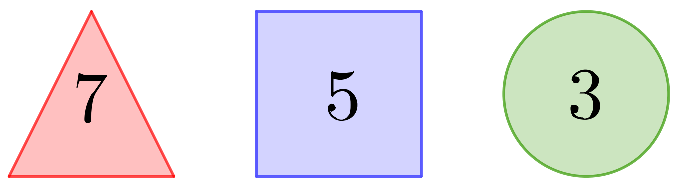
Problema de la Semana

Problema D

Lotería Geométrica

Felipe llevó al colegio tres bolsas con fichas geométricas de diferentes colores. La primera bolsa tiene 22 fichas **verdes** circulares, marcadas con los números del 1 al 22. La segunda bolsa tiene 15 fichas **rojas** triangulares, marcadas con los números del 1 al 15. Y la tercera bolsa tiene 10 fichas **azules** cuadradas, marcadas con los números del 1 al 10.

Felipe observó que hay un total de $22 \times 15 \times 10 = 3300$ combinaciones distintas de fichas que se pueden obtener si elegimos una ficha de cada bolsa al azar. Observa que elegir las fichas 7 roja, 5 azul y 3 verde es distinto de elegir las fichas 5 roja, 7 azul y 3 verde. El orden en que fueron elegidas no importa.



Felipe nos ha dicho que saquemos una ficha de cada bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más de las fichas que escojamos estén marcadas con el número 5?

Problema de la Semana
Problema D y Solución
Lotería Geométrica

Problema

Felipe llevó al colegio tres bolsas con fichas geométricas de diferentes colores. La primera bolsa tiene 22 fichas **verdes** circulares, numeradas del 1 al 22. La segunda bolsa tiene 15 fichas **rojas** triangulares, numeradas del 1 al 15. Y la tercera bolsa tiene 10 fichas **azules** cuadradas, numeradas del 1 al 10.

Felipe nos ha dicho que saquemos una ficha de cada bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más de las fichas que escojamos estén marcadas con el número 5?

Solución

Solución 1

Hay 22 fichas distintas que podemos elegir de la primera bolsa, 15 fichas distintas que podemos elegir de la segunda bolsa, y 10 fichas distintas que podemos elegir de la tercera bolsa. En cada bolsa, las fichas estan marcadas con un número distinto. Por lo tanto, hay un total de $22 \times 15 \times 10 = 3300$ combinaciones distintas de números que se pueden obtener al elegir una ficha de cada bolsa.

Para contar la cantidad de combinaciones en las que el 5 aparece en al menos dos fichas, consideraremos los siguientes casos:

1. Cada una de las fichas seleccionadas tiene un 5.

   Esto solo puede ocurrir de una forma.

2. Un 5 aparece en las fichas verde y roja pero no en la ficha azul.

   Hay 9 opciones para la ficha azul, excluyendo el 5. Por lo tanto, un 5 puede aparecer en las fichas verde y roja pero no en la ficha azul en un total de 9 formas distintas.

3. Un 5 aparece en las fichas verde y azul pero no en la ficha roja.

   Hay 14 opciones para la ficha roja, excluyendo el 5. Por lo tanto, un 5 puede aparecer en las fichas verde y azul pero no en la ficha roja en un total de 14 formas distintas.

4. Un 5 aparece en las fichas roja y azul pero no en la ficha verde.

   Hay 21 opciones para la ficha verde, excluyendo el 5. Por lo tanto, un 5 puede aparecer en las fichas roja y azul pero no en la ficha verde en un total de 21 formas distintas.

Si sumamos los resultados para cada uno de los casos, el número total de formas en las que un 5 puede paracer en al menos dos fichas es $1 + 9 + 14 + 21 = 45$. La probabilidad de que aparezca un 5 en al menos dos fichas es $\frac{45}{3300} = \frac{3}{220}$.

Solución 2

Esta solución usa el siguiente resultado de Teoría de Probabilidad: Si la probabilidad de que ocurra un evento A es a, la probabilidad de que ocurra un evento B, es b, la probabilidad de que ocurra un evento C, es c, y los resultados no dependen el uno del otro, entonces la probabilidad de que sucedan los tres eventos al mismo tiempo es $a \times b \times c$.

La probabilidad de que un número específico sea seleccionado de la bolsa verde es $\frac{1}{22}$ y la probabilidad de que un número específico no sea seleccionado de la bolsa verde es $\frac{21}{22}$.

Similarmente, la probabilidad de que un número específico sea seleccionado de la bolsa roja es $\frac{1}{15}$ y la probabilidad de que un número específico no sea seleccionado de la bolsa roja es $\frac{14}{15}$.

Y la probabilidad de que un número específico sea seleccionado de la bolsa azul es $\frac{1}{10}$ y la probabilidad de que un número específico no sea seleccionado de la bolsa azul es $\frac{9}{10}$.

Ahora, usemos la notación $P(p, q, r)$ para referirnos a la probabilidad de que p sea seleccionado de la bolsa verde, q sea seleccionado de la bolsa roja, y r sea seleccionado de la bolsa azul. Por ejemplo, $P(5, 5, \text{ no } 5)$ significa que queremos la probabilidad de que un 5 sea seleccionado de la bolsa verde, un 5 sea seleccionado de la bolsa roja, y culquier número excepto un 5 sea seleccionado de la bolsa azul.

$$
\begin{aligned}
& \text{Probabilidad de elegir un 5 en al menos dos bolsas} \\
= \; & \text{Probabilidad de elegir tres 5's} + \text{Probabilidad de elegir exactamente dos 5's} \\
= \; & \text{P(5, 5, 5)} + \text{P(5, 5, no 5)} + \text{P(5, no 5, 5)} + \text{P(no 5, 5, 5)} \\
= \; & \frac{1}{22} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{22} \times \frac{1}{15} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{22} \times \frac{14}{15} \times \frac{1}{10} + \frac{21}{22} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{10} \\
= \; & \frac{1}{3300} + \frac{9}{3300} + \frac{14}{3300} + \frac{21}{3300} \\
= \; & \frac{45}{3300} \\
= \; & \frac{3}{220}
\end{aligned}
$$

Concluimos que la probabilidad de que aparezca un 5 en al menos dos fichas es $\frac{3}{220}$.

Pensamiento Computacional (C)

VOLVER
A LA
PORTADA

Problema de la Semana

Problema D

Contando luces en vez de ovejas.

Algunas noches es complicado para John conciliar el sueño. Una de esas noches, en vez de contar ovejas, John decidió contar el número de LEDs (siglas en inglés de: diodo emisor de luz) que mostraba su reloj digital de mesa entre las 10:00 PM y las 12:59 AM. Por ejemplo, a las 11:11 PM, Jhon observó que 8 de los LEDs estaban encendidos.

Durante el tiempo en que John estuvo despierto (de 10:00 PM a 12:59 AM), ¿cuántas veces John vió exactamente 20 de los LEDs encendidos?

A continuación, puedes encontrar algo de información sobre el reloj de John:

- El reloj sólo marca la hora desde las 12:00 AM hasta las 11:59 PM.
- Cada dígito es formado usando siete LEDs. Estos están encendidos o apagados dependiendo del dígito que se está mostrando. Por ejemplo, para el dígito 2 se encienden cinco de los siete LEDs, mientras que para el 8 se encienden los siete LEDs. Todos los dígitos se muestran en el diagrama de abajo.
- Para marcar horas entre las 10:00 AM/PM y las 12:59 AM/PM se usan cuatro dígitos.
- Para marcar horas entre la 1:00 AM/PM y las 9:59 AM/PM, sólo se usan tres dígitos. Los LEDs del dígito mas a la izquierda se mantienen completamente apagados.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Contando luces en vez de ovejas.

Problema

Algunas noches es complicado para John conciliar el sueño. Una de esas noches, en vez de contar ovejas, John decidió contar el número de LEDs (siglas en inglés de: diodo emisor de luz) que mostraba su reloj digital de mesa entre las 10:00 PM y las 12:59 AM. Por ejemplo, a las 11:11 PM, Jhon observó que 8 de los LEDs estaban encendidos. Durante el tiempo en que John estuvo despierto (de 10:00 PM a 12:59 AM), ¿cuántas veces John vió exactamente 20 de los LEDs encendidos?

Solución

Primero, creamos una tabla que muestre el número de LEDs que se encienden para mostrar cada dígito.

Dígito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
# de LEDs encendidos	2	5	5	4	5	6	3	7	6	6

Como John está despierto de 10:00 PM a 12:59 AM, el dígito de la izquierda siempre es el 1. Como el reloj usa exactamente dos de los LEDs para mostrar el digito 1, los tres dígitos restantes deben usar exactamente 18 LEDs. El segundo dígito solo puede ser 0, 1 o 2. Dividiremos nuestro análisis en estos tres casos.

1. Entre las 10:00 PM y las 10:59 PM

   Los primeros dos dígitos son 10, los cuales usan $2 + 6 = 8$ LEDs. Los últimos dos dígitos deben formar un número entre 00 y 59, inclusive, tal que entre ambos dígitos se usen $20 - 8 = 12$ LEDs. Usando la tabla de arriba, podemos formar combinaciones válidas de dígitos, de forma que 12 LEDs estén encendidos. Para hacer esto, podemos tomar dos dígitos que usen 6 LEDs cada uno, o podemos tomar un dígito que use 5 LEDs y otro que use 7 LEDs. La combinación de dígitos debe marcar un tiempo válido, así que cuando usemos el 8, sólo lo podemos poner al final del número. Las únicas combinaciones válidas son 00, 06, 09, 28, 38, y 58. Por lo tanto, a las 10:00, 10:06, 10:09, 10:28, 10:38, y 10:58 hay 20 LEDs encendidos.

2. Entre 11:00 PM y las 11:59 PM

   Los primeros dos dígitos son el 1, los cuales usan $2 + 2 = 4$ LEDs. Los últimos dos dígitos deben usar 16 LEDs en total. Cada dígito puede usar un máximo de 7 LEDs, así que no es posible que los últimos dos dígitos usen 16 LEDs. Por lo tanto, entre las 11:00 PM y 11:59 PM nunca hay exactamente 20 LEDs encendidos.

3. Tiempos entre 12:00 y 12:59

   Los primeros dos dígitos son 1 y 2, los cuales usan $2 + 5 = 7$ LEDs. Los últimos dos dígitos deben usar 13 LEDs en total. La única forma de que esto suceda es si un dígito usa 6 LEDs y el otro usa 7 LEDs. El único dígito que usa 7 LEDs es el 8. Si hay un tiempo válido entre 12:00 y 12:59, el último dígito debe ser 8. Entonces, las únicas opciones para el tercer dígito son 6, 9 y 0. De estas tres opciones, sólo 0 se puede usar para formar una hora válida. Por lo tanto, el único instante entre las 12:00 AM y las 12:59 AM en el que hay 20 LEDs encendidos es a las 12:08 AM.

Combinando los tres casos, hay un total de $6 + 0 + 1 = 7$ veces en las que exactamente 20 de los LEDs están encendidos. Esto sucede a las 10:00 PM, 10:06 PM, 10:09 PM, 10:28 PM, 10:38 PM, 10:58 PM y 12:08 AM.

Para pensar:

Ignorando AM y PM, ¿cuántas veces entre 1:00 y 9:59 se usan exactamente 20 LEDs para marcar la hora? La respuesta puede sorprenderte.

Problema de la Semana
Problema D
¿De quién es este muñeco de nieve?

El Carnaval de invierno tiene atracciones para todas las edades. Daisy, Delilah, Donny y Duke han decidido participar en la competencia de construcción de muñecos de nieve.

Al decorar su muñeco de nieve, cada uno eligió una bufanda de color distinto, los colores que usaron fueron morado, rojo, verde y azul. Adicionalmente, cada uno seleccionó un accesorio distinto. Había un sombrero, unas orejeras, una flor y una nariz de zanahoria.

Daisy, Delilah, Donny y Duke han decidido ponerle a sus muñecos botones de carbón. Cada uno le puso a su muñeco diferentes cantidades de botones. Un muñeco tiene 2 botones, otro tiene 3, otro tiene 4 y el último tiene 5.

Usando las siguientes pistas, determina la combinación de accesorios y botones que cada persona usó para crear su muñeco de nieve.

1. El muñeco hecho por Daisy, el cual usa un sombrero, tiene un botón menos que el muñeco que tiene una bufanda roja, pero tiene un botón más que el muñeco que tiene una nariz de zanahoria.
2. El muñeco que usa una bufanda azul, que también tiene puesto las orejeras, tiene dos botones menos que el muñeco que usa una bufanda verde.
3. El muñeco que usa bufanda morada tiene un botón más que el muñeco creado por Delilah.
4. El muñeco creado por Duke usa una flor.

La siguiente tabla puede ser útil para que organices tu solución.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy												
Delilah												
Donny												
Duke												
Sombrero												
Orejeras												
Flor												
Nariz												
2 Botones												
3 Botones												
4 Botones												
5 Botones												

Problema de la Semana
Problema D y Solución
¿De quién es este muñeco de nieve?

Problema

El Carnaval de Invierno tiene atracciones para todas las edades. Daisy, Delilah, Donny y Duke han decidido participar en la competencia de construcción de muñecos de nieve. Al decorar su muñeco de nieve, cada uno eligió una bufanda de color distinto, los colores que usaron fueron morado, rojo, verde y azul. Adicionalmente, cada uno seleccionó un accesorio distinto. Había un sombrero, unas orejeras, una flor y una nariz de zanahoria. Daisy, Delilah, Donny y Duke han decidido ponerle a sus muñecos botones de carbón. Cada uno usó una cantidad distinta de botones. Un muñeco tiene 2 botones, otro tiene 3, otro tiene 4 y el último tiene 5. Usando las siguientes pistas, determina la combinación de accesorios y botones que cada persona usó para crear su muñeco de nieve.

1. El muñeco hecho por Daisy, el cual usa un sombrero, tiene un botón menos que el muñeco que tiene una bufanda roja, pero tiene un botón más que el muñeco que tiene una nariz de zanahoria.
2. El muñeco que usa una bufanda azul, que también tiene puesto las orejeras, tiene dos botones menos que el muñeco que usa una bufanda verde.
3. El muñeco que usa bufanda morada tiene un botón más que el muñeco creado por Delilah.
4. El muñeco creado por Duke usa una flor.

Respuesta

Primero daremos la solución para todos aquellos que quieran corroborar sus resultados. Posteriormente mostramos una manera posible de llegar a estas conclusiones.

- El muñeco de Daisy tiene una bufanda verde, un sombrero y 4 botones.
- El muñeco de Delilah tiene una bufanda azul, las orejeras y 2 botones.
- El muñeco de Donny tiene una bufanda morada, una nariz de zanahoria y 3 botones.
- El muñeco de Duke tiene una bufanda roja, una flor y 5 botones.

Solución

Para nuestra solución, actualizaremos la tabla usando cada una de las pistas dadas. Pondremos una X en una celda de la tabla si la combinación indicada por la fila y columna de esa celda no es posible. Pondremos un ✓ si la combinación es correcta.

De la pista (1), sabemos que el muñeco de nieve creado por Daisy usa un sombrero. Entonces, podemos poner un ✓ en la celda correspondiente. También podemos concluir que el muñeco de Daisy no tiene 2 o 5 botones, esto debido a que su muñeco tiene un botón menos que el muñeco con bufanda roja (así que no puede tener 5 botones) y un botón más que el muñeco con nariz de zanahoria (así que no puede tener 2 botones). Podemos poner una X en las celdas correspondientes.

Además, sabemos que el muñeco con bufanda roja no tiene 2 botones y el muñeco con nariz de zanahoria no tiene 5 botones. Así que ponemos una X en las celdas correspondientes.

Más aún, podemos concluir que el muñeco creado por Daisy no usa una bufanda roja y no tiene una nariz de zanahoria, y que el muñeco con bufanda roja no tiene una nariz de zanahoria. Entonces marcamos con X las correspondientes celdas. A la derecha puedes ver la tabla que tenemos hasta ahora.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓			X
Delilah												
Donny												
Duke												
Sombrero												
Orejeras												
Flor												
Nariz		X						X				
2 Botones		X										
3 Botones												
4 Botones												
5 Botones												

Como los muñecos tienen distintos accesorios, sabemos que los muñecos de Delilah, Donny y Duke no pueden tener sombrero. Similarmente, como un muñeco no puede tener dos accesorios al mismo tiempo, vemos que el muñeco de Daisy no usa orejeras ni flores. Ponemos una X en las celdas correspondientes.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah									X			
Donny									X			
Duke									X			
Sombrero		X			X			X				
Orejeras												
Flor												
Nariz		X						X				
2 Botones		X										
3 Botones												
4 Botones												
5 Botones												

Sabemos que el muñeco de nieve hecho por Daisy usa sombrero, y sabemos el muñeco hecho por Daisy no tiene ni 2 ni 5 botones. Entonces podemos concluir que el muñeco de nieve que usa el sombrero no tiene ni 2 ni 5 botones. Similarmente, concluimos que el muñeco con sombrero no usa una bufanda roja. Podemos poner una X en las celdas correspondientes. La tabla actualizada se muestra arriba.

Por la pista (2), sabemos que el muñeco con bufanda azul también usa orejeras. Así que ponemos un ✓ en la celda correspondiente.

También podemos determinar que el muñeco con bufanda azul no puede tener 4 o 5 botones porque este tiene menos botones que el muñeco con bufanda verde. Podemos poner una X en cada una de las celdas correspondientes.

Además, podemos poner una X en las celdas correspondientes al muñeco con bufanda verde y con 2 o 3 botones. La nueva tabla se muestra a la derecha.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah									X			
Donny									X			
Duke									X			
Sombrero		X			X			X				
Orejeras				✓								
Flor												
Nariz		X						X				
2 Botones		X	X									
3 Botones			X									
4 Botones				X								
5 Botones				X								

Como los muñecos de nieve tienen distintos accesorios y colores de bufanda, podemos poner X en las celdas correspondientes a los muñecos con bufanda morada, roja o verde que también usan orejeras. Adicionalmente, podemos poner X en las celdas correspondientes al muñeco usando una bufanda azul junto con un sombrero, flor o nariz de zanahoria.

Sabemos que el muñeco de nieve con bufanda azul tiene orejeras y a la vez sabemos que no tiene 4 ni 5 botones. Deducimos que el muñeco con orejeras no tiene 4 ni 5 botones. Podemos poner X en las celdas correspondientes. La tabla actualizada se muestra a la derecha.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah									X			
Donny									X			
Duke									X			
Sombrero		X		X	X			X				
Orejeras	X	X	X	✓			X	X				
Flor				X								
Nariz		X		X				X				
2 Botones		X	X									
3 Botones			X									
4 Botones				X								
5 Botones				X								

Podemos ver entonces que el muñeco usando bufanda roja también tiene una flor, y que el muñeco usando la flor debe tener 5 botones. Así que el muñeco de nieve con bufanda roja tiene 5 botones. Podemos añadir las correspondientes ✓ y X. La nueva tabla se muestra a la derecha.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah									X			
Donny									X			
Duke									X			
Sombrero		X		X	X			X				
Orejeras	X	X	X	✓			X	X				
Flor	X	✓	X	X	X	X	X	✓				
Nariz		X		X				X				
2 Botones		X	X									
3 Botones		X	X									
4 Botones		X		X								
5 Botones	X	✓	X	X								

De aquí podemos ver que el muñeco con bufanda verde tiene 4 botones y podemos añadir los ✓ y X correspondientes.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah									X			
Donny									X			
Duke									X			
Sombrero		X		X	X			X				
Orejeras	X	X	X	✓			X	X				
Flor	X	✓	X	X	X	X	X	✓				
Nariz		X		X				X				
2 Botones		X	X									
3 Botones		X	X									
4 Botones	X	X	✓	X								
5 Botones	X	✓	X	X								

Gracias a la pista (3) vemos que el muñeco con bufanda morada tiene dos botones y que el muñeco hecho por Delilah no puede tener 5 botones. Podemos entonces poner una X en las celdas correspondientes. También podemos poner una X en la celda correspondiente al muñeco hecho por Delilah y con bufanda morada. La nueva tabla se muestra a la derecha.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah	X							X	X			
Donny									X			
Duke									X			
Sombrero		X		X	X			X				
Orejeras	X	X	X	✓			X	X				
Flor	X	✓	X	X	X	X	X	✓				
Nariz		X		X				X				
2 Botones	X	X	X									
3 Botones		X	X									
4 Botones	X	X	✓	X								
5 Botones	X	✓	X	X								

De la nueva tabla podemos ver que el muñeco con bufanda azul tiene 2 botones y que el muñeco con bufanda morada tiene 3 botones. Podemos añadir los ✓ y X en las celdas correspondientes. Pero como el muñeco con bufanda azul tiene orejeras, podemos concluir que el muñeco con orejeras tiene 2 botones y colocamos los correspondientes ✓ y X en las celdas. La nueva tabla la puedes ver a la derecha.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah	X							X	X			
Donny									X			
Duke									X			
Sombrero		X		X	X			X				
Orejeras	X	X	X	✓	✓	X	X	X				
Flor	X	✓	X	X	X	X	X	✓				
Nariz		X		X	X			X				
2 Botones	X	X	X	✓								
3 Botones	✓	X	X	X								
4 Botones	X	X	✓	X								
5 Botones	X	✓	X	X								

Por la pista (4) sabemos que el muñeco construido por Duke usa una flor. Podemos añadir los ✓ y X en las celdas correspondientes. Como sabemos que el muñeco de nieve con una flor tiene 5 botones y también tiene bufanda roja, podemos concluir que el muñeco de nieve hecho por Duke tiene 5 botones y usa una bufanda roja. Añadimos los ✓ y X en las celdas correspondientes. La tabla actualizada esta a la derecha.

	Morado	Rojo	Verde	Azul	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy		X			X			X	✓	X	X	X
Delilah	X	X						X	X		X	
Donny		X						X	X		X	
Duke	X	✓	X	X	X	X	X	✓	X	X	✓	X
Sombrero		X		X	X			X				
Orejeras	X	X	X	✓	✓	X	X	X				
Flor	X	✓	X	X	X	X	X	✓				
Nariz		X		X	X			X				
2 Botones	X	X	X	✓								
3 Botones	✓	X	X	X								
4 Botones	X	X	✓	X								
5 Botones	X	✓	X	X								

Ya utilizamos todas las pistas y puede parecer que no podremos llegar a nuestro objetivo. Debemos realizar un esfuerzo extra e ir de nuevo a la información dada. En particular, vamos a la pista (1) una vez más. Esta pista nos dice que el muñeco de Daisy tiene un botón menos que el muñeco con bufanda roja. Pero el muñeco con bufanda roja tiene 5 botones, así que el muñeco que hizo Daisy debe tener 4 botones. Podemos añadir los correspondientes ✓ y X a la tabla.

También sabemos que el muñeco de Daisy usa un sombrero, así que el muñeco que usa un sombrero tiene 4 botones. Además, sabemos que el muñeco que tiene 4 botones usa bufanda verde. Concluimos entonces que el muñeco hecho por Daisy tiene bufanda verde, un sombrero y 4 botones. Podemos añadir los correspondientes ✓ y X a la tabla. La nueva tabla se muestra a continuación.

	Purple	Red	Green	Blue	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy	X	X	✓	X	X	X	✓	X	✓	X	X	X
Delilah	X	X	X				X	X	X		X	
Donny		X	X				X	X	X		X	
Duke	X	✓	X	X	X	X	X	✓	X	X	✓	X
Sombrero	X	X	✓	X	X	X	✓	X				
Orejeras	X	X	X	✓	✓	X	X	X				
Flor	X	✓	X	X	X	X	X	✓				
Nariz		X	X	X	X		X	X				
2 Botones	X	X	X	✓								
3 Botones	✓	X	X	X								
4 Botones	X	X	✓	X								
5 Botones	X	✓	X	X								

Sabemos que el muñeco de Donny usa una bufanda morada, y que el muñeco con bufanda morada tiene una nariz de zanahoria. Así que el muñeco de Donny tiene una nariz de zanahoria. Pero el muñeco con nariz de zanahoria tiene 3 botones. Concluimos que el muñeco de Donny tiene 3 botones. Entonces, el muñeco de Delilah debe tener 2 botones, una bufanda azul y orejeras. La nueva tabla se muestra a continuación.

	Purple	Red	Green	Blue	2 Botones	3 Botones	4 Botones	5 Botones	Sombrero	Orejeras	Flor	Nariz
Daisy	X	X	✓	X	X	X	✓	X	✓	X	X	X
Delilah	X	X	X	✓	✓	X	X	X	X	✓	X	X
Donny	✓	X	X	X	X	✓	X	X	X	X	X	✓
Duke	X	✓	X	X	X	X	X	✓	X	X	✓	X
Sombrero	X	X	✓	X	X	X	✓	X				
Orejeras	X	X	X	✓	✓	X	X	X				
Flor	X	✓	X	X	X	X	X	✓				
Nariz	✓	X	X	X	X	✓	X	X				
2 Botones	X	X	X	✓								
3 Botones	✓	X	X	X								
4 Botones	X	X	✓	X								
5 Botones	X	✓	X	X								

La tabla esta completa y podemos resumir nuestros resultados de la siguiente manera:

El muñeco de Daisy tiene una bufanda verde, un sombrero y 4 botones.

El muñeco de Delilah tiene una bufanda azul, las orejeras y 2 botones.

El muñeco de Donny tiene una bufanda morada, una nariz de zanahoria y 3 botones.

El muñeco de Duke tiene una bufanda roja, una flor y 5 botones.

Problema de la Semana

Problema D

Máquina de luces

Una máquina tiene 2020 luces y un botón. Cada vez que se presiona el botón, tres luces (previamente seleccionadas por el usuario) cambian de estado. Es decir, si una de las luces estaba encendida, ésta se apaga, y si la luz estaba apagada, ésta se enciende.

Si todas las luces de la máquina están apagadas, ¿cuál es el menor número de veces que se debe presionar el botón para que todas las luces esten encendidas?

Ayuda: Empieza por resolver el problema con una máquina que tiene un número menor de luces.

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Máquina de luces

Problema

Una máquina tiene 2020 luces y un botón. Cada vez que se presiona el botón, tres luces (previamente seleccionadas por el usuario) cambian de estado. Es decir, si una de las luces estaba encendida, ésta se apaga, y si la luz estaba apagada, ésta se enciende. Si todas las luces de la máquina están apagadas, ¿cuál es el menor número de veces que se debe presionar el botón para que todas las luces esten encendidas?

Ayuda: Empieza por resolver el problema con una máquina que tiene un número menor de luces.

Solución

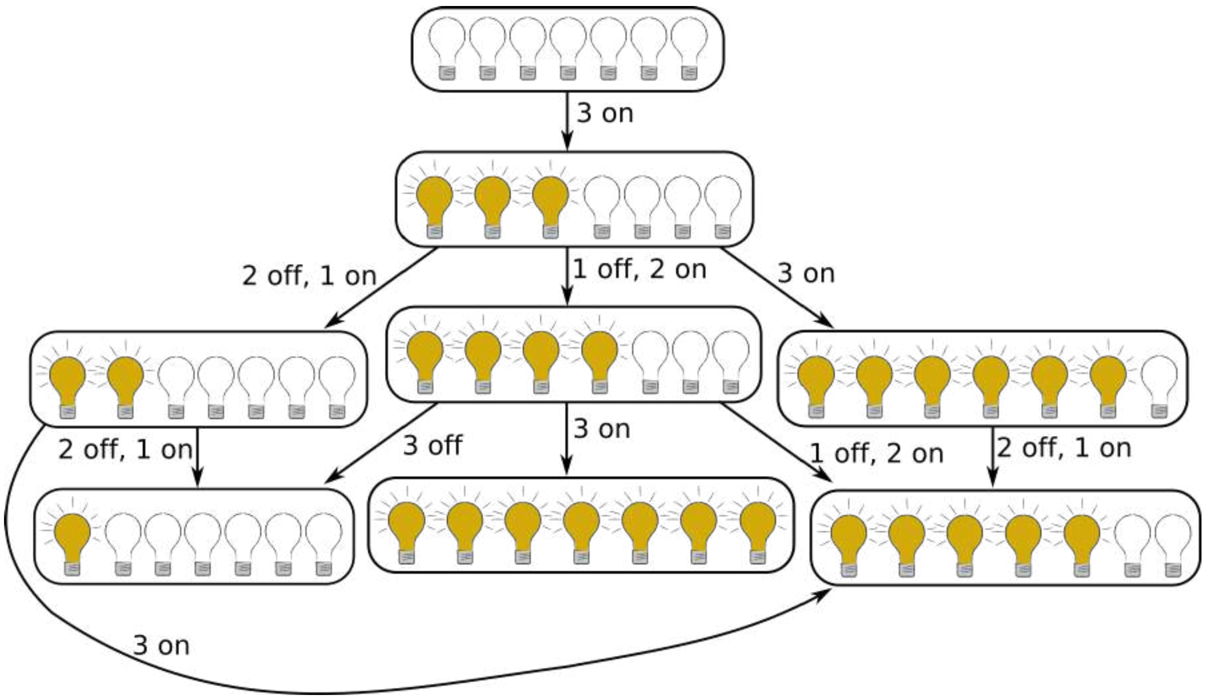
Para encender las luces de la máquina de la manera más eficiente, debemos escoger tres luces que se encuentren apagadas y encenderlas presionando el botón:

- Al presionar por primera vez el botón, tres luces se deben encender.
- Al presionar por segunda vez el botón, otras tres luces se deben encender, para un total de 6.
- Al presionar por tercera vez el botón, tres luces más deben estar encedidas, para un total de 9.
- Y así sucesivamente.

Si continuamos con este proceso, vemos que el número de luces encedidas siempre será un multiplo de 3. Pero como 2020 **no** es un multiplo de 3, en algún momento tendremos que apagar al menos una bombilla. Como queremos presionar el botón el menor número de veces, debemos minimizar el número de bombillas que se apagarán durante todo el proceso.

Supongamos que hemos presionado el botón 671 veces y cada vez hemos encedido tres nuevas luces. Como $671 \times 3 = 2013$, esto quiere decir que nos han faltado 7 luces por encender. Veamos cómo prodríamos encender las 7 luces restantes dibujando un diagrama con todas las posibilidades de encendidos y apagados.

Recuerda que el order de las bombillas no importa. Solo estamos interesados en cuántas (y no cuáles) bombillas están encendidas. Por simplicidad en el siguiente diagrama, en cada paso hemos movido todas las luces encendidas a la izquierda.



En el diagrama, las flechas indican (en inglés) el número de luces que hemos encendido y apagado para pasar de un dibujo al otro. Por ejemplo, si la flecha indica "2 off, 1 on", esto quiere decir que hemos apagado dos bombillas que estaban encedidas, y hemos encedido una bombilla que estaba apagada.

No hemos incluido las operaciones que puedan reversar los encendidos o apagados que acabamos de hacer ya que esto no sería eficiente.

El diagrama muestra que la manera más eficiente de encender todas las luces es:

1. Encender 3 de las 7 luces.

2. Apagar una de las tres luces encendidas y encender dos mas, para un total de 4 luces encendidas.

3. Finalmente, encender las tres luces restantes.

En total, habremos presionado el botón unas $671 + 3 = 674$ veces. Observa que en este proceso sólo hemos apagado una sola luz! Esto muestra que 674 es el menor número de veces que se necesita presionar el botón para encender todas las luces.

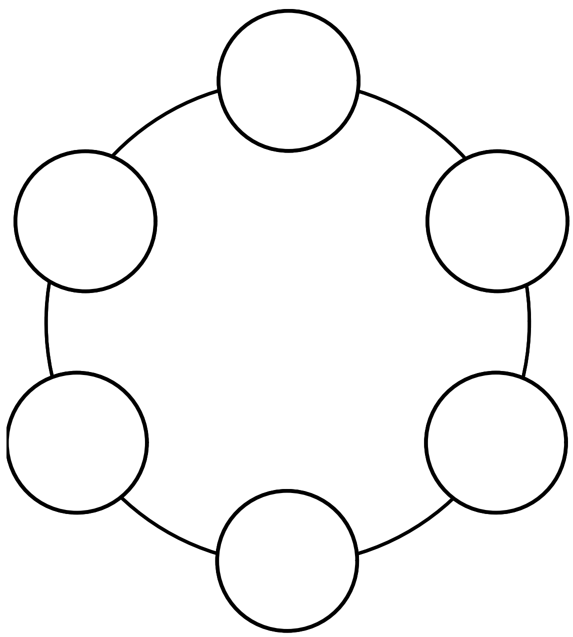
Problema de la Semana

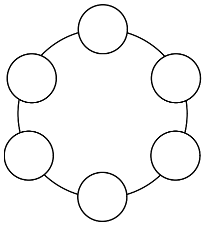
Problema D

Arreglos numéricos.

Los números 1, 6, 8, 13, 15 y 20 se pueden ubicar en el círculo que se muestra a continuación, de tal manera que cada uno de los números aparezca exactamente una vez y que la suma de cada par de números en círculos adjacentes sea un múltiplo de siete.

Determina todas las maneras *diferentes* (es decir, arreglos diferentes) de ubicar los números en el círculo satisfaciendo estas dos condiciones. Nota que dos arreglos de números se consideran el mismo si es posible obtener uno del otro usando una serie de reflecciones y/o rotaciones del diagrama.





Problema de la Semana

Problema D y Solución

Arreglos numéricos.

Problema

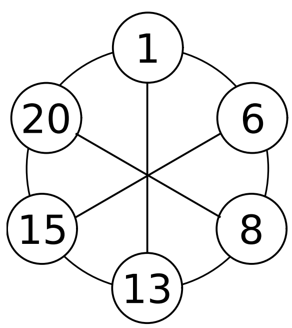
Los números 1, 6, 8, 13, 15 y 20 se pueden ubicar en el círculo que se muestra a continuación, de tal manera que cada uno de los números aparezca exactamente una vez y que la suma de cada par de números en círculos adjacentes sea un múltiplo de siete. Determina todas las maneras *diferentes* (es decir, arreglos diferentes) de ubicar los números en el círculo satisfaciendo estas dos condiciones. Nota que dos arreglos de números se consideran el mismo si es posible obtener uno del otro usando una serie de reflecciones y/o rotaciones del diagrama.

Solución

Primero escribimos todas las parejas de números cuya suma es un múltiplo de 7.

Suman 7	Suman 14	Suman 21	Suman 28	Suman 35
1,6	1,13	6,15	13,15	15,20
	6,8	8,13	8,20	
		1,20		

Podemos visualizar mejor esta tabla si situamos los números en un círculo, y dibujamos una linea conectando los números cuya suma es multiplo de 7.

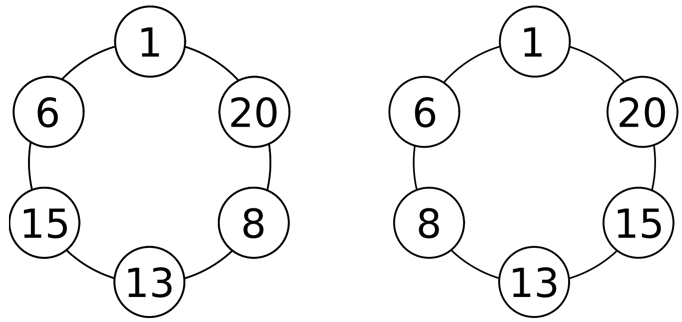


Determinaremos los diferentes arreglos estudiando varios casos. Nota que dos arreglos son diferentes, si hay al menos un número que es adjacente a números diferentes en cada arreglo.

Primero, consideremos los números que puden ser adjacentes a 1. Observamos que 6, 13, y 20 son los únicos números en nuestra lista cuya suma con 1 es un múltiplo de 7, así que tenemos tres posibles casos: 1 es adjacente a 6 y 20, 1 es adjacente a 6 y 13, y 1 es adjacente a 13 y 20. Consideramos cada caso por separado.

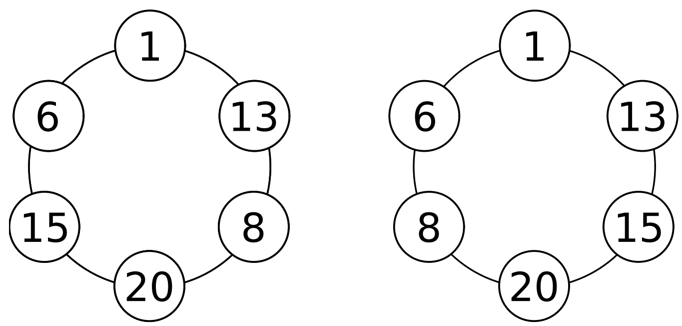
Caso 1: 1 es adjacente a 6 y 20

En este caso, la tabla nos indica que 13 debe ser adjacente a 15 y 8, pues 1 ya no esta disponible. Las dos posibles formas de situar estos números se muestran a continuación.



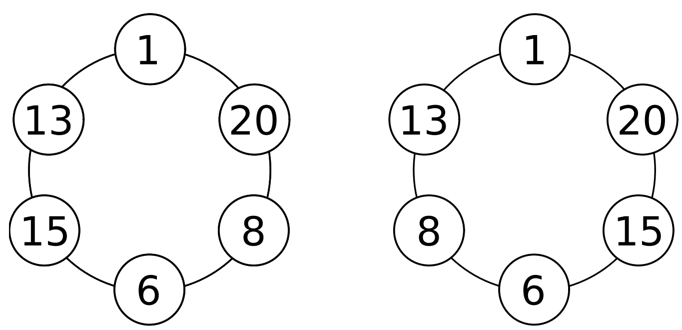
Caso 2: 1 es adjacente a 6 y 13

Aquí, la tabla nos dice que 20 debe ser adjacente a 15 y 8, ya que 1 no esta disponible. De nuevo, hay solo dos posibilidades:



Caso 3: 1 es adjacente a 13 y 20

En este caso, la tabla nos dice que 6 debe ser adjacente a 15 y 8. Las dos últimas posibilidades serían:



Así, hemos encontrado que en total existen 6 arreglos diferentes. Estos se muestran en los Casos 1 a 3 arriba.