Problema de la Semana

Problema D y Solución

Los Nietos

Problema

Mis abuelos tienen cuatro nietos. Si multiplicamos las edades los cuatro, el resultado es 67 184. El menor de los nietos tiene menos de 10 años, y es 30 años mas jóven que el mayor de los nietos. Determina todas las posibles edades que pueden tener los nietos de mis abuelos.

Solución

Primero, debemos factorizar 67 184. Como 67 184 es par, podemos dividir entre potencias de 2 y obtener que $67\,184 = 2^4 \times 4199$. Si continuamos factorizando, eventualmente decubrimos que $67\,184 = 1 \times 2^4 \times 13 \times 17 \times 19$. Observa que incluímos el número 1 como factor (ya que uno de los nietos podría tener 1 año).

Como el menor tiene menos de 10, si observamos la factorización descubrimos que el menor debe tener 1, 2, 4 u 8 años. Revisaremos por separarado cada caso, para las cuatro posibles edades del menor.

Si el menor tiene 1, el mayor debe tener $1 + 30 = 31$. Como no hay forma de combinar otros factores para obtener 31, es imposible que se de este caso.

Si el menor tiene 2, el mayor debe tener $2 + 30 = 32$. Como no hay forma de combinar otros factores para obtener 32, es imposible que se de este caso.

Si el menor tiene 4, el mayor debe tener $4 + 30 = 34$. Como $34 = 2 \times 17$, las otras edades tendrían que formarse combinando 2, 13 y 19 (una sola potencia). Es decir, las otras dos edades podrían ser $2 \times 13 = 26$ y 19, o bien 13 y $2 \times 19 = 38$, o bien 2 y $13 \times 19 = 247$. Como $38 > 34$ y $247 > 34$, y el mayor de los nietos tiene 34, la segunda y tercera opción no son válidas. Por lo tanto, obtenemos que una posibilidad es que los nietos tengan 4, 34, 26 y 19 años.

Si el menor tiene 8, el mayor debe tener $8 + 30 = 38$. Como $38 = 2 \times 19$, las otras edades deberían ser 13 y 17. Por lo tanto, obtenemos que otra posibilidad es que los nietos tengan 8, 38, 13 y 17 años.

Por lo tanto, hay dos posibilidades para las edades de los nietos de mis abuelos. Podrían ser 4, 19, 26 y 34, o podrían ser 8, 13, 17 y 38.