Problema de la Semana

Problema D y Solución

Todo en su Lugar 2

Problema

(a) Un diagrama de Venn tiene dos círculos, A y B. Cada círculo contiene parejas ordenadas (x, y) tales que x y y son números reales que satisfacen las siguientes condiciones.

A: $y = -x + 1$

B: $y = 3x + 5$

La región donde se traslapan los círculos contiene parejas ordenadas que están tanto en A como en B, mientras que la región afuera de ambos círculos contiene parejas ordenadas que no están ni en A ni en B. En total este diagrama de Venn tiene cuatro regiones. Acomoda parejas ordenadas en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar una pareja para cada región?

(b) Un diagrama de Venn tiene tres círculos, A, B y C. Cada círculo contiene enteros n que satisfacen lo siguiente.

A: $3n < 20$

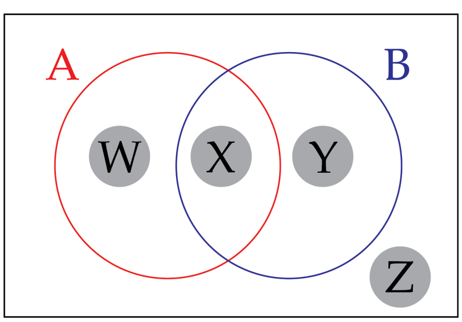
B: $n + 9 > 6$

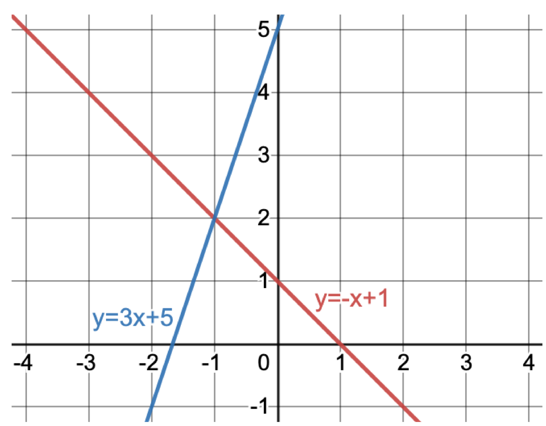
C: n es par

En total este diagrama de Venn tiene ocho regiones. Acomoda enteros en tantas regiones como puedas. ¿Es posible encontrar un entero para cada región?

Solución

(a) Llamamos W, X, Y, y Z a las regiones. Como referencia, graficamos las ecuaciones en una cuadrícula .





- Las parejas ordenadas (x, y) en la región W deben satisfacer $y = -x + 1$, pero *no* $y = 3x + 5$. Cualquier punto en la línea $y = -x + 1$ que *no* está en la línea $y = 3x + 5$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 1)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región X deben satisfacer tanto $y = -x + 1$ como $y = 3x + 5$. El único punto que satisface esto es el punto de intersección, $(-1, 2)$.
- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Y deben satisfacer $y = 3x + 5$, pero *no* $y = -x + 1$. Cualquier punto en la línea $y = 3x + 5$ que *no* está en la línea $y = -x + 1$ satisface esto. Un ejemplo es $(0, 5)$.

- Las parejas ordenadas (x, y) en la región Z *no* deben satisfacer $y = 3x + 5$ ni $y = -x + 1$. Cualquier punto que no esté en ninguna de las líneas satisface esto. Un ejemplo es $(2, 2)$.

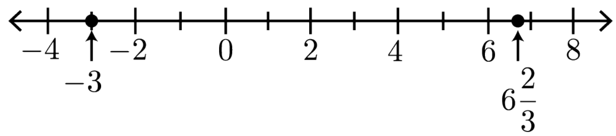
(b) Hemos llamado a las ocho regiones S, T, U, V, W, X, Y, y Z. Es útil si primero resolvemos las desigualdades.

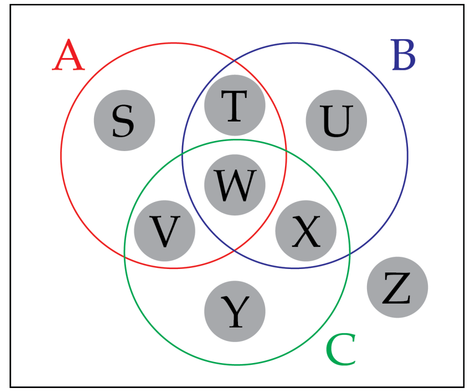
Para A:

$$3n < 20$$
$$n < \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Para B:

$$n + 9 > 6$$
$$n > -3$$





- Cualquier entero en la región S debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Cualquier número impar menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -5.
- Cualquier entero en la región T debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-1, 1, 3$, y 5.
- Cualquier entero en la región U debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número impar. Cualquier número impar mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 7.
- Cualquier entero en la región V debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Cualquier número par menor o igual que -3 satisface esto. Un ejemplo es -4.
- Cualquier entero en la región W debe ser menor que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Los únicos enteros que satisfacen esto son $-2, 0, 2, 4$, y 6.
- Cualquier entero en la región X debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, mayor que -3 y un número par. Cualquier número par mayor o igual que $6\frac{2}{3}$ satisface esto. Un ejemplo es 8.
- Cualquier entero en la región Y debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número par. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región se queda vacía.
- Cualquier entero en la región Z debe ser mayor o igual que $6\frac{2}{3}$, menor o igual que -3 y un número impar. Ningún entero satisface estas tres condiciones, así que esta región también se queda vacía.