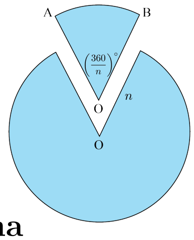

Problema de la Semana

Problema D y Solución

Una Rebanada a la Vez

Problema

Los puntos A y B están en un círculo con centro O y radio n de forma que $\angle AOB = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$. El sector AOB se separa del círculo. Determina todos los enteros positivos n para los cuales el perímetro del sector AOB es mayor a 20 y menor a 30.

NOTA: Te puede ser útil el hecho de que la razón entre la longitud de un arco y longitud la circunferencia es la misma que la razón entre el ángulo del sector y 360°. De hecho, obtenemos la misma razón si comparamos el área del sector con el área total del círculo.

Solución

En general, si el ángulo del sector crece y el radio de se queda igual, entonces la longitud del arco también crece. Pero en este problema, cuando el radio n crece, el sector del ángulo $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ decrece. Por lo que es difícil "ver" qué pasa con la longitud del arco.

Sabemos que la razón entre la longitud del arco y la circunferencia es la misma que la razón entre ángulo del sector y 360°. Es decir,

$$\frac{\text{longitud del arco } AB}{\text{circunferencia}} = \frac{\text{ángulo del sector } AOB}{360^\circ}$$

Reacomodando, obtenemos

$$\text{longitud del arco } AB = \frac{\text{ángulo del sector } AOB}{360^\circ} \times \text{circunferencia}$$

Como $d = 2n$, sabemos que: circunferencia $= \pi d = \pi \times 2n$. Entonces,

$$\text{longitud del arco } AB = \frac{\frac{360}{n}}{360} \times \pi \times 2n = 2\pi$$

Ahora podemos usar la longitud de arco para calcular el perímetro de AOB.

$$\begin{aligned}\text{perímetro de } AOB &= AO + OB + \text{longitud del arco } AB \\ &= n + n + 2\pi \\ &= 2n + 2\pi\end{aligned}$$

Si el perímetro es mayor a 20, entonces

$$\begin{aligned}2n + 2\pi &> 20 \\ n + \pi &> 10 \\ n &> 10 - \pi \approx 6.9\end{aligned}$$

Si el perímetro es menor a 30, entonces

$$\begin{aligned}2n + 2\pi &< 30 \\ n + \pi &< 15 \\ n &< 15 - \pi \approx 11.9\end{aligned}$$

Queremos valores enteros de n tales que $n > 6.9$ y $n < 11.9$. Los únicos valores enteros de n que satisfacen estas condiciones son $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ y $n = 11$.