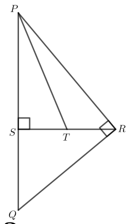


Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Cuál es el Término?

Problema

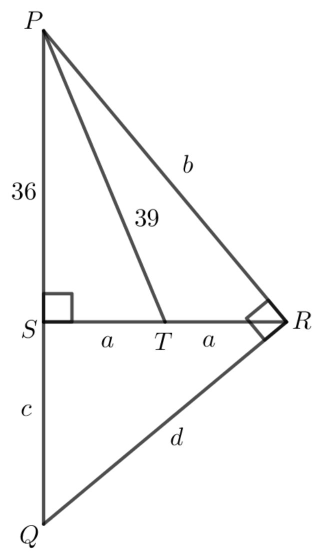
$\triangle PQR$ es un triángulo rectángulo con $\angle PRQ = 90°$. S es el punto en la recta PQ tal que SR es altura de $\triangle PQR$. T es el punto en la recta SR tal que PT es mediana de $\triangle PSR$.

Si la longitud de la mediana PT es 39 y la longitud de PS es 36, determine cuánto mide QS.

NOTA: la *altura* de un triángulo es un segmento trazado desde un vértice del triángulo y que es perpendicular al lado opuesto. La *mediana* es un segmento trazado desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

Solución

Como T es mediana en $\triangle PSR$, $ST = TR$. Sea $ST = TR = a$ y sean $PR = b$, $QS = c$ y $QR = d$. En el siguiente diagrama se muestran las variables y la información proporcionada $PS = 36$ y $PT = 39$.



Como $\triangle PST$ tiene un ángulo recto en S,

$$\begin{aligned} ST^2 &= PT^2 - PS^2 \\ a^2 &= 39^2 - 36^2 \\ &= 225 \end{aligned}$$

Entonces, como $a > 0$, obtenemos que $a = 15$. Por lo tanto, $SR = 2a = 30$.

Como $\triangle PSR$ tiene un ángulo recto en S,

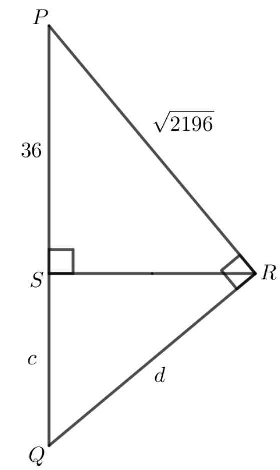
$$\begin{aligned} PR^2 &= PS^2 + SR^2 \\ b^2 &= 36^2 + 30^2 \\ &= 2196 \end{aligned}$$

Entonces, como $b > 0$, se sigue que $b = \sqrt{2196}$.

Ahora usaremos $a = 15$ y $b = \sqrt{2196}$ en las siguientes tres soluciones.

Solución 1

En $\triangle PSR$ y $\triangle PRQ$, tenemos dos ángulos comunes $\angle PSR = \angle PRQ = 90^\circ$ y $\angle SPR = \angle QPR$. Por lo tanto, $\triangle PSR$ es semejante a $\triangle PRQ$. Se sigue que



$$\begin{aligned}\frac{PS}{PR} &= \frac{PR}{PQ}\\ \frac{36}{\sqrt{2196}} &= \frac{\sqrt{2196}}{36+c}\\ 1296+36c &= 2196\\ 36c &= 900\\ c &= 25\end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Solución 2

Como $\triangle RSQ$ tiene un ángulo recto en S, $QR^2 = QS^2 + SR^2 = c^2 + 30^2 = c^2 + 900$.
Por lo tanto, $d^2 = c^2 + 900$.

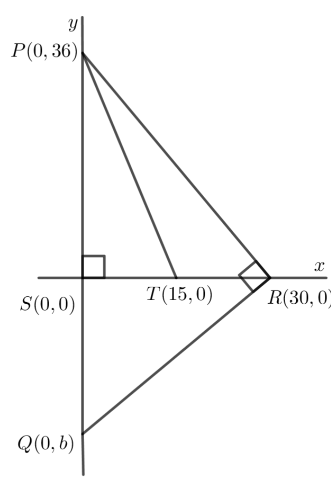
Como $\triangle PQR$ tiene un ángulo recto en R, $PQ^2 = PR^2 + QR^2$. Entonces, $(36+c)^2 = (\sqrt{2196})^2 + d^2$, y simplificando obtenemos $1296 + 72c + c^2 = 2196 + d^2$. Esto se reduce a $c^2 + 72c = 900 + d^2$.

Sustituyendo $d^2 = c^2 + 900$, obtenemos $c^2 + 72c = 900 + c^2 + 900$. Simplificando, obtenemos $72c = 1800$ y concluimos que $c = 25$.

Por lo tanto, la longitud de QS es 25.

Solución 3

Podemos trazar $\triangle PQR$ en el plano cartesiano de forma que PQ esté sobre el eje y, y la altura SR esté sobre la parte positiva del eje x, con S en el origen. Entonces P tiene coordenadas $(0,36)$, T tiene coordenadas $(15,0)$, y R tiene coordenadas $(30,0)$.
Como Q está sobre el eje y, denotamos las coordenadas de Q por $(0,b)$ con $b<0$.
Observa que



$$\text{pendiente } PR = \frac{36-0}{0-30} = \frac{-6}{5} \text{ y pendiente } QR = \frac{b-0}{0-30} = \frac{b}{-30}$$

Como $\angle PRQ = 90^\circ$, $PR \perp QR$, y entonces la pendiente de una es el recíproco negativo de la otra. Es decir, $\frac{b}{-30} = \frac{5}{6}$, y entonces $b = -25$.

Se sigue que las coordenadas de Q son $(0,-25)$. Por lo tanto, la longitud de QS es 25.