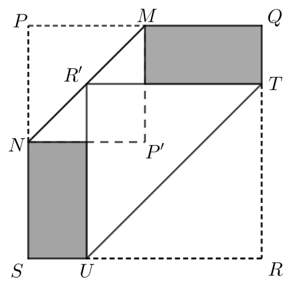
Problema de la Semana

Problema D y Solución

De Cuadrado a Hexágono

Problema

Un pedazo de papel cuadrado, $PQRS$, tiene lados de longitud 40 cm. El papel es gris de un lado y blanco del otro lado. Sea M el punto medio de del lado PQ y sea N el punto medio del lado PS. Doblamos el papel en la línea MN de forma que la esquina P toca de nuevo al papel en el punto P'. El punto T está sobre QR y el punto U está sobre SR de forma que TU es paralelo a MN, y cuando se dobla el papel en la línea TU, la esquina R toca de nuevo al papel en el punto R' que está sobre MN.



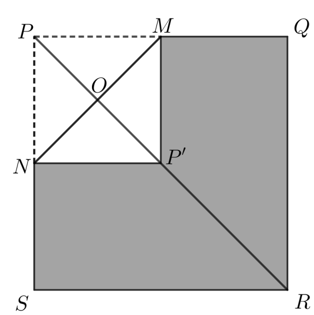
¿Cuál es el área del hexágono $NMQTUS$?

Solución

Para determinar el área del hexágono $NMQTUS$, tomaremos el área del cuadrado $PQRS$ y le restaremos las áreas de $\triangle PMN$ y de $\triangle TRU$.

Como M y N son puntos medios de PQ y PS, respectivamente, sabemos que $PM = \frac{1}{2}(PQ) = 20$ cm y $PN = \frac{1}{2}(PS) = 20$ cm. Por lo tanto, $PM = PN = 20$ y $\triangle PMN$ es un triángulo rectángulo isósceles. Entonces $\angle PNM = \angle PMN = 45°$.

Después del primer doblez, P toca al papel en P'. $\triangle P'MN$ es una reflexión de $\triangle PMN$ a través de la línea MN. Entonces $\angle P'MN = \angle PMN = 45°$ y $\angle P'NM = \angle PNM = 45°$. Por lo tanto, $\angle PMP' = \angle PNP' = 90°$. Como los cuatro lados de $PMP'N$ tienen la misma longitud, y las cuatro esquinas miden 90°, $PMP'N$ es un cuadrado.



Como $\angle MPP' = \angle MPR = 45°$, la diagonal PP' del cuadrado $PMP'N$ está sobre la diagonal PR del cuadrado $PQRS$. Sea O la intersección de las dos diagonales del cuadrado $PMP'N$. También es la intersección de MN y PR. (Luedo demostraremos que de hecho es el punto R', el punto donde hace contacto R después del segundo doblez.)

La longitud de la diagonal de $PMP'N$ se puede obtener con el Teorema de Pitágoras.

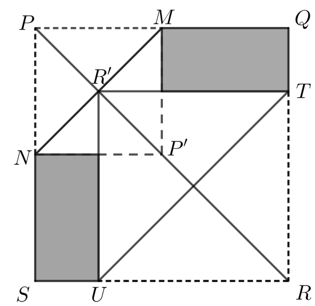
$$PP' = \sqrt{(PM)^2 + (MP')^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = \sqrt{400}\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

Entonces, $PO = \frac{1}{2}(PP') = \frac{1}{2}(20\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$ cm.

En los últimos dos pasos para calcular PP' simplificamos el radical, haremos esto varias veces durante la solución. A continuación mostramos el proceso para simplificar radicales, para aquellos que no estén familiarizados:

- Encuentra el mayor cuadrado perfecto que divide al radicando (el número dentro de la raíz). En este caso, 400 es el mayor cuadrado perfecto que divide a 800.
- Reescribe el radicando como el producto del cuadrado perfecto y el factor restante. En este caso, obtenemos $\sqrt{400 \times 2}$.
- Obtén la raíz cuadrada del cuadrado perfecto. En este caso, obtenemos $20\sqrt{2}$.

Como TU es paralela a MN, tenemos que $\angle RTU = \angle RUT = 45°$ y $\triangle TRU$ es un triángulo rectángulo isósceles con $TR = RU$. Como $\triangle TRU$ se refleja en el segmento TU y R' es la imagen de R, obtenemos otro cuadrado, $TRUR'$. No daremos los detalles porque el argumento es muy similar a lo que hicimos con $PMP'N$. Como $\angle TRR' = \angle TRP = 45°$, RR' está sobre la diagonal PR. Además, R' está sobre MN. Esto significa que R' y O son el mismo punto y entonces $PR' = PO = 10\sqrt{2}$ cm.



Para calcular la longitud de la diagonal de $PQRS$ podemos usar el Teorema de Pitágoras.

$$PR = \sqrt{(PQ)^2 + (QR)^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} = \sqrt{3200} = \sqrt{1600}\sqrt{2} = 40\sqrt{2}$$

La longitud de RR' es igual a la longitud de PR menos la longitud de PR'.

$$RR' = PR - PR' = 40\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

Pero $RR' = TU$, entonces $TU = 30\sqrt{2}$ cm. Sea $TR = RU = x$. Entonces, usando el Teorema de Pitágoras en $\triangle TRU$,

$$\begin{aligned}(TR)^2 + (RU)^2 &= (TU)^2 \\ x^2 + x^2 &= (30\sqrt{2})^2 \\ x^2 + x^2 &= 900 \times 2 \\ 2x^2 &= 1800 \\ x^2 &= 900\end{aligned}$$

Como $x > 0$, obtenemos que $x = 30$ cm. Ahora tenemos suficiente información para calcular el área del hexágono $NMQTUS$.

$$\begin{aligned}\text{Área } NMQTUS &= \text{Área } PQRS - \text{Área } \triangle PMN - \text{Área } \triangle TRU \\ &= PQ \times QR - \frac{PM \times PN}{2} - \frac{TR \times RU}{2} \\ &= 40 \times 40 - \frac{20 \times 20}{2} - \frac{30 \times 30}{2} \\ &= 1600 - \frac{400}{2} - \frac{900}{2} \\ &= 1600 - 200 - 450 \\ &= 950\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del hexágono $NMBPQD$ es 950 cm^2.