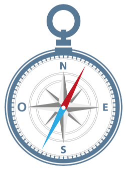



# Problema de la Semana

## Problema D y Solución

## Geocaching Cartesiano

### Problema

Geocaching es un tipo de búsqueda del tesoro al aire libre, donde las personas usan dispositivos GPS para buscar objetos escondidos, llamados caches. En Geocaching Cartesiano, en lugar de usar un GPS, las ubicaciones se describen usando coordenadas Cartesianas.

Hilde designa un gran campo para jugar Geocaching Cartesiano, mide las distancias en kilómetros de forma que el punto $(1, 0)$ está a 1 km al este del punto $(0, 0)$, por ejemplo.

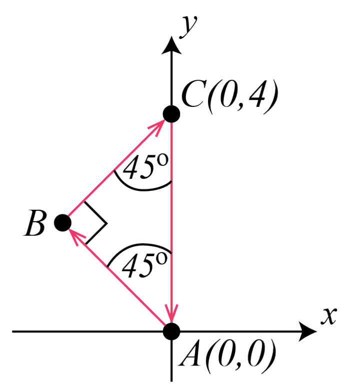
Hilde empieza en el punto $A(0, 0)$, luego camina al noroeste en línea recta hasta un punto $B$, en donde esconde un cache. Luego desde $B$, camina al noreste en línea recta hasta el punto $C(0, 4)$ donde esconde otro cache. Finalmente, regresa en línea recta al punto $A$.

¿Qué distancia recorrió Hilde en total?

## Solución

Mostraremos cuatro soluciones distintas para este problema.

## Solución 1




Si caminas hacia el noroeste desde $A(0, 0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje $y$. El punto $B$ se encuentra en algún lugar de esta línea. Si caminas hacia el noreste desde $B$ a $C(0, 4)$, la trayectoria intersectará al eje $y$ formando un ángulo de 45°.

En $\triangle ABC$, $\angle BAC = \angle BCA = 45°$. Se sigue que $\triangle ABC$ es isósceles. Como dos de los ángulos en $\triangle ABC$ son 45°, entonces el tercer ángulo es $\angle ABC = 90°$ por lo que es un triángulo rectángulo.

La distancia del punto $A$ al punto $C$ es $AC = 4$ km. Sea $BC = AB = m$, para algún $m > 0$. Utilizando el Teorema de Pitágoras, podemos encontrar el valor de $m$.

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\ 4^2 &= m^2 + m^2 \\ 16 &= 2m^2 \\ 8 &= m^2 \end{aligned}$$

Entonces como $m > 0$, obtenemos $m = \sqrt{8}$.

Por lo tanto, Hilde recorrió $AB + BC + AC = \sqrt{8} + \sqrt{8} + 4 = (2\sqrt{8} + 4)$ km.

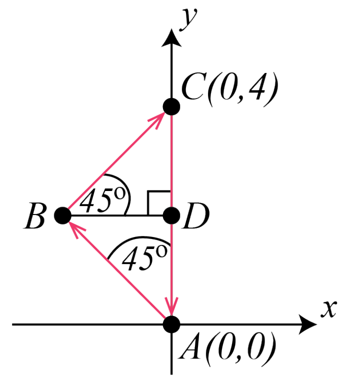
Observa que $\left(2\sqrt{8} + 4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8} + 4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2}) + 4 = 2(2\sqrt{2}) + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

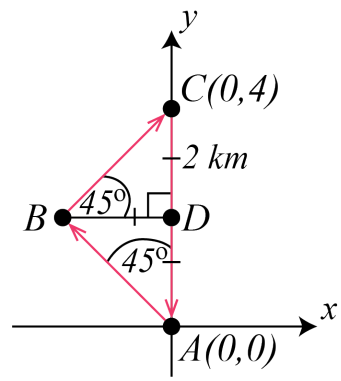
Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.

## Solución 2




Si caminas hacia el noroeste desde $A(0,0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de $45°$ con la parte positiva del eje $y$. El punto $B$ se encuentra en algún lugar de esta línea. Si caminas hacia el noreste desde $B$ a $C(0,4)$, la trayectoria intersectará al eje $y$ formando un ángulo de $45°$.

Desde $B$, dibujamos un segmento perpendicular al eje $y$, que interesecta al eje $y$ en $D$. Cuando camines en dirección noreste desde $B$ a $C$, la trayectoria forma un ángulo de $\angle DBC = 45°$.




En $\triangle ABD$, $\angle BAD = 45°$ y $\angle ADB = 90°$. Se sigue que $\angle ABD = 45°$, $\triangle ABD$ es isósceles y $BD = AD$.

En $\triangle CBD$, $\angle CBD = 45°$ y $\angle CDB = 90°$. se sigue que $\angle BCD = 45°$, $\triangle CBD$ es isósceles y $CD = BD$.

La distancia entre $A$ y $C$ es $AC = 4$ km. Como $CD = AD$ y $AC = CD + AD$, entonces sabemos que $CD = AD = 2$ km. Como $CD = BD$ entonces $CD = BD = AD = 2$ km.

Por el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABD$, podemos calcular la longitud de $AB$.

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$
$$AB^2 = 2^2 + 2^2$$
$$AB^2 = 8$$

Entonces como $AB > 0$, tenemos que $AB = \sqrt{8}$.

Usando el mismo razonamiento en $\triangle CBD$, obtenemos $BC = \sqrt{8}$.

Entonces, la distancia total recorrida por Hilde es
$AB + BC + AC = \sqrt{8} + \sqrt{8} + 4 = (2\sqrt{8} + 4)$ km.

Observa que $\left(2\sqrt{8} + 4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

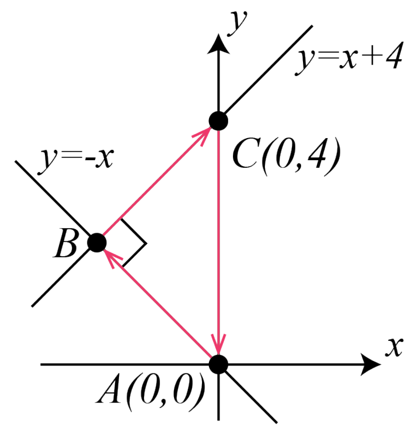
La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8} + 4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2}) + 4 = 2(2\sqrt{2}) + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.

## Solución 3

Si caminas hacia el noroeste desde $A(0,0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje $y$. Es decir, la línea tiene una pendiente de $-1$. Como esta línea pasa por $A(0,0)$ entonces la ecuación de la línea que pasa por $A$ y $B$ es $y = -x$.




El punto $B$ se encuentra en algún lugar de la recta $y = -x$. Una recta en dirección noreste, sería perpendicular a la recta con dirección noroeste. Como la línea en dirección noroeste tiene pendiente $-1$, entonces la línea con dirección noreste tiene pendiente 1. Esta segunda línea pasa por $B$ y $C$, tiene pendiente 1 e intersecta al eje $y$ en el punto 4, que es la coordenada $y$ de $C$. Entonces la ecuación de la segunda línea es $y = x + 4$.

Como el punto $B$ se encuentra en la recta $y = -x$ y la recta $y = x + 4$, podemos resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las coordenadas de $B$. Como $y = y$,

$$\begin{aligned} -x &= x + 4 \\ -2x &= 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Si sustituimos $x = -2$ en $y = -x$, obtenemos $y = 2$. Entonces las coordenadas de $B$ son $(-2, 2)$.

Utilizando la fórmula para la distancia, podemos encontrar las longitudes de $AB$ y $BC$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\ BC &= \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \end{aligned}$$

La distancia entre $A$ y $C$ es $AC = 4$ km. Es decir, $AC = 4$.

Entonces, la distancia total recorrida por Hilde es
$AB + BC + AC = \sqrt{8} + \sqrt{8} + 4 = (2\sqrt{8} + 4)$ km.

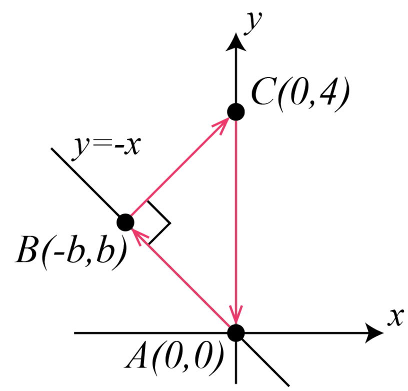
Observa que $\left(2\sqrt{8} + 4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8} + 4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2}) + 4 = 2(2\sqrt{2}) + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.

## Solución 4




Si caminas hacia el noroeste desde $A(0,0)$, la línea que describe la trayectoria forma un ángulo de $45°$ con la parte positiva del eje $y$. Es decir, la línea tiene una pendiente de $-1$. Como esta línea pasa por $A(0,0)$ entonces la ecuación de la línea que pasa por $A$ y $B$ es $y = -x$. Una recta en dirección noreste, sería perpendicular a la recta con dirección noroeste, entonces $AB$ es perpendicular a $BC$, es decir $\angle ABC = 90°$.

El punto $B$ se encuantra en algún lugar de la recta $y = -x$. Digamos que las coordenadas de $B$ son $(-b, b)$ para algún $b > 0$.

Utilizando la fórmula para la distancia, podemos encontrar las longitudes de $AB$ y $BC$.

$$AB = \sqrt{(-b-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2b^2}$$
$$BC = \sqrt{(0-(-b))^2 + (4-b)^2} = \sqrt{b^2 + 16 - 8b + b^2} = \sqrt{2b^2 - 8b + 16}$$

La distancia entre $A$ y $C$ es $AC = 4$ km. Es decir, $AC = 4$.

Utilizando el Teorema de Pitágoras podemos encontrar el valor de $b$.

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
4^2 &= \left(\sqrt{2b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2b^2 - 8b + 16}\right)^2 \\
16 &= 2b^2 + (2b^2 - 8b + 16) \\
16 &= 4b^2 - 8b + 16 \\
0 &= 4b^2 - 8b \\
0 &= b^2 - 2b \\
0 &= b(b-2) \\
b &= 0, 2
\end{aligned}$$

Como $b > 0$, se sigue que $b = 2$. Podemos sustituir $b = 2$ en nuestra expresión para $AB$ y $BC$.

$$AB = \sqrt{2b^2} = \sqrt{2(2)^2} = \sqrt{8}$$
$$BC = \sqrt{2b^2 - 8b + 16} = \sqrt{2(2)^2 - 8(2) + 16} = \sqrt{8}$$

Entonces, la distancia total recorrida por Hilde es
$AB + BC + AC = \sqrt{8} + \sqrt{8} + 4 = (2\sqrt{8} + 4)$ km.

Observa que $\left(2\sqrt{8} + 4\right)$ es una respuesta *exacta*. Podemos usar una calculadora para determinar que la distancia es aproximadamente 9.7 km.

La distancia total recorrida se puede simplificar como:

$$2\sqrt{8} + 4 = 2(\sqrt{4}\sqrt{2}) + 4 = 2(2\sqrt{2}) + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

Este método para simplificar radicales se enseña en cursos más avanzados de matemáticas.