



## 2

## Problema de la Semana

### Problema D y Solución

#### Baraja De Cien 2

#### Problema

La Baraja de Cien es una baraja que consiste de 100 cartas numeradas del 1 al 100. Cada carta tiene el mismo número impreso en ambos lados. Un lado de la carta es roja y el otro es amarillo.

Sarai pone todas las cartas en una mesa con el lado rojo hacia arriba. Primero, Sarai voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 2. Luego, voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 3. Por último, voltea todas las cartas que tienen un número múltiplo de 5.

Cuando Sarai termina, ¿Cuántas cartas tienen su lado rojo hacia arriba?

#### Solución

Después de voltear todas las cartas con múltiplos de 2, hay 50 cartas con su lado rojo hacia arriba y 50 cartas con su lado amarillo hacia arriba. Las cartas con el lado rojo hacia arriba son impares, mientras que las cartas con el lado amarillo hacia arriba son las pares.

Luego, en la segunda ronda, Sarai voltea las cartas con múltiplos de 3. Veamos cuántas cartas con su lado rojo hacia arriba serán volteadas a amarillo y cuántas cartas con su lado amarillo hacia arriba serán volteadas a rojo.

Hay 33 múltiplos de 3 entre 1 y 100. Estos son,

$$3, 6, 9, 12, 15, \dots, 87, 90, 93, 96, 99$$

De estos números, 17 son impares y 16 son pares. Los 17 múltiplos impares de 3 tienen su lado rojo hacia arriba, y entonces se voltean a amarillo. Los 16 múltiplos pares de 3 tienen su lado amarillo hacia arriba, y entonces se voltean a rojo (otra vez).

Entonces, después de la primera ronda habían 50 cartas con su lado rojo hacia arriba y 50 cartas con su lado amarillo hacia arriba. De las 50 rojas, 17 se cambian a amarillo. De las 50 amarillas, 16 se cambian a rojo. Por lo tanto, después de la segunda ronda,  $50 - 17 + 16 = 49$  cartas tienen su lado rojo hacia arriba y 51 cartas tienen su lado amarillo hacia arriba. Las cartas con el lado rojo hacia arriba son las cartas con números que son impares y no múltiplos de 3, o que son pares y múltiplos de 3. Las cartas con el lado amarillo hacia arriba son las cartas con números que son impares y múltiplos de 3, o que son pares y no son múltiplos de 3.



En la tercera ronda, Sarai voltea las cartas con múltiplos de 5. Es decir, voltea las cartas

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

Para determinar el color en el que quedan estas 20 cartas después de voltearse, consideramos cuatro casos.

- Caso 1: El número es par y no es múltiplo de 3.

Hay 7 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, impar y no es múltiplo de 3. Estas cartas son

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

Antes de voltearlas, estas 7 cartas tenían el lado rojo hacia arriba y entonces se voltean a amarillo.

- Caso 2: El número es par y múltiplo de 3.

Hay 3 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, par y múltiplo de 3. Estas cartas son

30, 60, 90

Antes de voltearlas, estas 3 cartas tenían el lado rojo hacia arriba y entonces se voltean a amarillo.

- Caso 3: El número es impar y múltiplo de 3.

Hay 3 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, impar y múltiplo de 3. Estas cartas son

15, 45, 75

Antes de voltearlas, estas 3 cartas tenían el lado amarillo hacia arriba y entonces se voltean a rojo.

- Caso 4: El número es impar y no es múltiplo de 3.

Hay 7 cartas que tienen un número que es múltiplo de 5, impar y no es múltiplo de 3. Estas cartas son

10, 20, 40, 50, 70, 80, 100

Antes de voltearlas, estas 7 cartas tenían el lado amarillo hacia arriba y entonces se voltean a rojo.

Por lo tanto, cuando Sarai termina, hay  $49 - 7 - 3 + 3 + 7 = 49$  cartas que tienen su lado rojo hacia arriba.