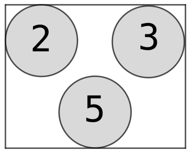

Problema de la Semana

Problema D y Solución

El Juego de Dardos

Problema

En un carnaval, un juego de dardos tiene tres círculos que no se traslapan dentro de un rectángulo. Un círculo vale 2 puntos, otro vale 3 puntos, y el tercero vale 5 puntos. Puedes lanzar hasta 10 dardos, y comienzas con 0 puntos. Si el dardo cae en un círculo, obtienes los puntos maracados en el círculo. Si el dardo no cae en ingún círculo, entonces obtienes 0 puntos.

Supongamos que obtienes exactamente 30 puntos después de 10 lanzamientos. Sea a la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 5, sea b la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 3, y sea c la cantidad de lanzamientos que caen en el círculo de valor 2. Determina todas las posibles tripletas (a, b, c).

Solución

Debemos determinar las posibles tripletas (a, b, c) tales que $5a + 3b + 2c = 30$ y $a + b + c \leq 10$.

Empezamos revisando los posibles valores de a. Como $6 \times 5 = 30$, el mayor valor posible de a es 6. El menor valor posible de lanzamientos es $a = 0$.

Observemos el caso en el que $a = 2$ para crear un proceso que nos ayude a determinar la cantidad de formas de obtener 30. El proceso es el mismo en todos los casos pero sólo lo mostraremos a detalle para este caso.

Si $a = 2$, esto aporta $2 \times 5 = 10$ puntos. Por lo tanto, necesitamos obtener $30 - 10 = 20$ puntos de los lanzamientos a los otros dos círculos, con valores 2 y 3.

Entonces, encontraremos el máximo valor de b, que es la cantidad de lanzamientos al círculo con valor 3. Queremos que los b lanzamientos aporten un número menor o igual a 20, pero también queremos que falten una cantidad par de puntos, ya que sólo lo podemos completar con lanzamientos al círculo de valor 2.

Si $b = 7$, estos serían $7 \times 3 = 21$ puntos, que es mayor a 20. Si $b = 6$, esto da $6 \times 3 = 18$ puntos. Entonces $c = 1$ completaría para tener exactamente 30 puntos. Observa que la cantidad total de lanzamientos es $a + b + c = 2 + 6 + 1 = 9 \leq 10$, como queríamos. Entonces, una opción es tomar $a = 2$, $b = 6$ y $c = 1$.

Debemos reemplazar los círculos con valor de 3 por círculos de valor 2. Observemos que cada dos círculos de valor 3 dan un total de 6. Así que podemos reemplazar esos dos círculos de valor 3 con tres círculos de valor 2. Esto siginifica que $b = 6 - 2 = 4$ y $c = 1 + 3 = 4$. Observa que $a + b + c = 2 + 4 + 4 = 10 \leq 10$. Entonces, otra posibilidad es tomar $a = 2$, $b = 4$ y $c = 4$.

De nuevo podemos reemplazar esos dos círculos de valor 3 con tres círculos de valor 2. Esto significa que $b = 4 - 2 = 2$ y $c = 4 + 3 = 7$. Observa que en este caso $a + b + c = 2 + 2 + 7 = 11 > 10$, es decir, requiere más de 10 lanzamientos. Por lo tanto, esta no es una opción.

De nuevo podemos reemplazar esos dos círculos de valor 3 con tres círculos de valor 2. Esto significa que $b = 2 - 2 = 0$ y $c = 7 + 3 = 10$. Pero de nuevo $a + b + c = 2 + 0 + 10 = 12 > 10$, por lo que tampoco es una opción.

Ya no podemos reemplazar de nuevo dos monedas de valor 3 por que significaría que b es negativo.

En resumen, cuando $a = 2$, hay dos combinaciones que dan un total de 30 y tales que $a + b + c \leq 10$.

Podemos usar el mismo procedimiento con todos los valores de a. A continuación, mostramos un resumen de los resultados obtenidos.

a	b	c	$5a + 3b + 2c$	$a + b + c$
6	0	0	30	6
5	1	1	30	7
4	2	2	30	8
4	0	5	30	9
3	5	0	30	8
3	3	3	30	9
3	1	6	30	10
2	6	1	30	9
2	4	4	30	10
1	7	2	30	10
0	10	0	30	10

Obtenemos que hay 11 posibles tripletas para la cantidad de lanzamientos que cayeron en cada círculo. Las 11 posibles tripletas (a, b, c) son:

$(6, 0, 0)$, $(5, 1, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(4, 0, 5)$, $(3, 5, 0)$, $(3, 3, 3)$, $(3, 1, 6)$, $(2, 6, 1)$, $(2, 4, 4)$, $(1, 7, 2)$, $(0, 10, 0)$