



Problema de la Semana

$$\frac{1}{70\,000\,000} = \dots\dots\dots$$

Problema D y Solución

Una y Otra Vez

Problema

Cuando la fracción $\frac{1}{70\,000\,000}$ se escribe como decimal, ¿qué dígito aparece en el 2023^{ésimo} lugar después del punto decimal?

Solución

Notemos que $\frac{1}{70\,000\,000} = \frac{1}{10\,000\,000} \times \frac{1}{7} = 0.000\,000\,1 \times \frac{1}{7}$.

Además, ten en cuenta que $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. Es decir, cuando $\frac{1}{7}$ se escribe como decimal, los dígitos después del punto decimal aparecen en bloques repetidos de los 6 dígitos 142857.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{70\,000\,000} = 0.000\,000\,1 \times \frac{1}{7} = 0.000\,000\,1 \times 0.\overline{142857} = 0.000\,000\,0\overline{142857}.$$

Es decir, cuando $\frac{1}{70\,000\,000}$ se escribe como decimal, los dígitos después del punto decimal serán siete ceros seguidos de bloques repetidos de seis dígitos 142857.

Vemos que la representación decimal de $\frac{1}{70\,000\,000}$ tiene la misma repetición que la de $\frac{1}{7}$, pero el patrón se desplaza 7 lugares. Por lo tanto, el 2023^{ésimo} dígito después del punto decimal cuando $\frac{1}{70\,000\,000}$ se escribe como decimal es el mismo que el $(2023 - 7) = 2016$ ^{ésimo} dígito después del punto decimal cuando $\frac{1}{7}$ se escribe como decimal.

Dado que $\frac{2016}{6} = 336$, entonces el 2016^{ésimo} dígito después del punto decimal ocurre exactamente después de 336 bloques repetidos de 6 dígitos 142857. Por lo tanto, el 2016^{ésimo} dígito es el último dígito del bloque repetido, que es 7.

El 2023^{ésimo} dígito después del punto decimal en la representación decimal de $\frac{1}{70\,000\,000}$ es lo mismo que el 2016^{ésimo} dígito después del punto decimal en la representación decimal de $\frac{1}{7}$, y por lo tanto es 7.